

# Estratégia de Controle Não Linear com Estimativa de Domínio de Atração para uma Classe de Sistemas Sujeitos a Saturação nos Atuadores

Gabriela L. Reis \* Rodrigo F. Araújo \*\* Leonardo A. B. Tôrres \*\*\*  
Reinaldo M. Palhares \*\*\*

\* Departamento de Educação e Tecnologia, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, MG, (e-mail: gabriela.reis@ifsudestemg.edu.br).

\*\* Departamento de Engenharia de Controle e Automação, Universidade do Estado do Amazonas, AM (e-mail: rfaraujo@uea.edu.br)

\*\*\* Departamento de Engenharia Eletrônica, Universidade Federal de Minas Gerais, MG (e-mail: leotorres@ufmg.br, rpalhares@ufmg.br)

---

**Abstract:** This paper presents a new methodology of regional stabilization for a class of uncertain nonlinear systems with input saturation by state feedback. In this approach, nonlinear systems are described by Differential-Algebraic Representations (DAR) and regional stability is guaranteed through a set of conditions in terms of Linear Matrix Inequalities (LMIs) to obtain the largest estimated ellipsoidal Domain of Attraction (DoA) within a given polytopic region in state space. The proposed approach incorporates information about the system's nonlinearities in the control law and uses new auxiliary decision variables in order to achieve less conservative results. Numerical examples illustrate the effectiveness of the proposed methodology, showing favorable comparisons with approaches in a similar context.

**Resumo:** Este artigo apresenta uma nova metodologia de estabilização regional para uma classe de sistemas não lineares com saturação na entrada de controle, por realimentação de estados. Nesta abordagem, os sistemas não lineares são descritos a partir de uma Representação Algébrico-Diferencial (DAR) e a estabilidade regional é garantida por meio de um conjunto de condições na forma de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), com o objetivo de obter o maior Domínio de Atração (DoA) elipsoidal estimado dentro de uma dada região politópica no espaço de estados. A abordagem proposta incorpora informações sobre as não linearidades do sistema à lei de controle e considera novas variáveis auxiliares de decisão a fim de obter resultados menos conservadores. Um exemplo numérico ilustra a eficácia da metodologia proposta, mostrando comparações favoráveis com abordagens em um contexto similar.

*Keywords:* Differential-Algebraic Representation; Nonlinear Control; Input Saturation; Regional Stabilization; Lyapunov Theory.

*Palavras-chaves:* Representação-Algébrico Diferencial; Controle Não-Linear; Saturação na Entrada; Estabilização Regional; Teoria de Lyapunov.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Grande parte dos sistemas dinâmicos em aplicações práticas, como por exemplo, sistemas eletromecânicos, eletrônicos, químicos e biológicos, apresentam comportamento não linear. Considerar características não lineares de certos sistemas é essencial para modelar fenômenos não lineares e garantir a validade dos resultados (Khalil, 2002). Além disso, estratégias de controle não linear podem ser importantes para obter um melhor desempenho do sistema de controle em malha fechada. No entanto, a análise de estabilidade e o projeto de controladores para sistemas não lineares podem ser bastante desafiadores.

A derivação de métodos genéricos de análise de estabilidade e síntese de controladores para sistemas não lineares,

por vezes, é uma tarefa difícil devido à diversidade de fenômenos não lineares e, portanto, a maioria das metodologias é voltada para classes de sistemas bem definidas. Além disso, para um sistema não linear nem sempre é possível garantir a estabilidade global. Portanto, uma abordagem amplamente explorada por pesquisadores é considerar uma região compacta no espaço de estados na qual um Domínio de Atração (DoA) estimado pode ser determinado (Boyd et al., 2004). Esses trabalhos consideram restrições de estado geradas por limitações no sistema físico ou associadas ao domínio de validade do modelo matemático do sistema (Azizi et al., 2018; Coutinho et al., 2020). Além disso, restrições da entrada de controle decorrentes da saturação do atuador também têm sido estudadas mais profundamente (Hu and Lin, 2001; Tarbouriech et al., 2011).

Dentro deste contexto, este trabalho tem como objetivo apresentar condições de estabilização aprimoradas para sistemas não lineares incertos em tempo contínuo sujeitos a saturação da entrada de controle. Nesta pesquisa, consideramos a classe de sistemas não lineares com campos vetoriais expressos por funções *racionais*, que representa uma ampla gama de fenômenos em aplicações práticas (Gomes da Silva Jr. et al., 2014). Uma forma particular de expressar esta classe de sistemas é utilizando uma Representação Algébrico-Diferencial (DAR). A partir de uma DAR, é possível obter uma representação exata de sistemas racionais a partir de um conjunto de equações algébricas e diferenciais. Assim, é possível aplicar a teoria de estabilidade de Lyapunov e ferramentas baseadas em Desigualdades Matriciais Lineares (LMI) para esta classe de sistemas – o que têm proporcionado o desenvolvimento de trabalhos sobre análise de estabilidade (Coutinho et al., 2008; Trofino and Dezuo, 2014; Coutinho and Souza, 2013; Oliveira et al., 2013b) e projeto de controladores (Azizi et al., 2018; Oliveira et al., 2013a; Reis et al., 2021).

No que se refere a sistemas não lineares com saturação na entrada de controle, devido a dificuldades inerentes no desenvolvimento de condições de síntese, abordagens baseadas em DAR foram propostas tendo em vista o projeto de controladores por realimentação de estados lineares para estabilização e estimativa de DoA (Oliveira et al., 2012). Melhorias foram relatadas em Azizi et al. (2018), utilizando realimentação linearizante e considerando a presença de incertezas. O objetivo deste artigo é apresentar novos desenvolvimentos, incorporando informações sobre as não linearidades do sistema na lei de controle.

Neste sentido, este trabalho propõe novas condições de estabilização para o projeto controladores não lineares por realimentação de estados de ganho escalonado para sistemas não lineares incertos, em tempo contínuo, com saturação de entrada de controle, descritos na forma de DAR. A Seção 2 apresenta a formulação do problema. As condições para síntese de controladores propostas para a classe de sistemas abordada são fornecidas na Seção 3. A Seção 4 traz um exemplo numérico que mostra a efetividade da metodologia proposta. Por fim, as considerações finais são feitas na Seção 5.

**Notação.**  $\mathbb{R}^n$  é o espaço Euclidiano  $n$ -dimensional,  $\mathbb{R}^{m \times n}$  é o conjunto de matrizes reais  $m \times n$ ,  $I_n$  é a matriz identidade  $n \times n$  e  $\text{diag}\{\dots\}$  é a matriz bloco diagonal. Para uma matriz real  $M$ ,  $M^\top$  é sua transposta,  $M > 0$  ( $M \geq 0$ ) significa que  $M$  é simétrica positiva definida (semi-positiva definida) e  $M_{(i)}$  é a  $i$ -ésima linha.  $\text{He}\{M\}$  denota o termo simétrico  $M + M^\top$ . O símbolo  $\star$  denota blocos simétricos em uma matriz simétrica.  $\mathcal{I}_n = [1, n] \subset \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , é um conjunto de índices. Para dois conjuntos  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$  e  $\Delta \subset \mathbb{R}^{n_\delta}$ , a notação  $\mathcal{X} \times \Delta \subset \mathbb{R}^{n_x + n_\delta}$  é o produto cartesiano de  $\mathcal{X}$  and  $\Delta$ . O simplex unitário é dado por:

$$\Lambda_1 := \left\{ \alpha_{p(t)} \in \mathbb{R}^N : \sum_{v=1}^N \alpha_{p(v)}(t) = 1, \alpha_{p(v)}(t) \geq 0 \right\},$$

em que  $p$  é um índice utilizado para distinguir diferentes politopos,  $N$  é o número de vértices e  $\alpha_{p(v)}(t)$  é o  $v$ -ésimo vetor de entrada no tempo  $t$ . Por simplicidade, a dependência das variáveis com o tempo  $t$  é omitida ao longo deste artigo, quando seu sentido for direto.

## 2. CONCEITOS PRELIMINARES

Considere a seguinte classe de sistemas dinâmicos não lineares:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \delta(t)) + \sum_{s=1}^{n_u} g_s(x(t), \delta(t)) \text{sat}(u_s(t)), \quad (1)$$

em que  $x(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$  representa o vetor de estados do sistema,  $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_{n_u}(t)]^\top \in \mathbb{R}^{n_u}$  com  $n_u \leq n_x$  é a entrada de controle,  $\delta(t) \in \Delta \subset \mathbb{R}^{n_\delta}$  é o vetor de parâmetros incertos e a saturação na entrada de controle é dada por

$$\text{sat}(u_s(t)) := \text{sign}(u_s(t)) \times \min\{|u_s(t)|, u_{0(s)}\}, \quad s \in \mathcal{I}_{n_u},$$

em que  $u_{0(s)}$  é o máximo valor absoluto de  $u_s(t)$ . Além disso, assuma que:

- (1)  $f(\cdot) : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_\delta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ , e  $g_s(\cdot) : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_\delta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  são funções vetoriais Lipschitz-contínuas em seus argumentos e racionais em  $\mathcal{X} \times \Delta$ ;
- (2)  $f(0, \delta(t)) = 0$  para todo  $\delta(t) \in \Delta$ .

As premissas (1) e (2) correspondem à classe de sistemas racionais e garantem a existência e unicidade das soluções da equação diferencial na região  $\mathcal{X} \times \Delta$ , a qual contém o ponto de equilíbrio  $x = 0$ , para  $u = 0$ ,  $\forall \delta \in \Delta$ .

O problema a ser abordado neste artigo é o projeto de controladores não lineares que asseguram a estabilidade robusta do sistema (1). Neste sentido, a seguir será apresentada a representação matemática do sistema utilizada neste trabalho, bem como importantes conceitos preliminares aplicados na obtenção das condições de estabilização propostas.

### 2.1 Região politópica no espaço de estados

Devido a limitações físicas, requisitos de segurança, ou a existência de uma região de validade do modelo matemático utilizado, o domínio de operação do sistema deve ser considerado no projeto de controladores.

Neste trabalho, considera-se como o domínio de operação do sistema, um conjunto politópico  $\mathcal{X}$  definido no espaço de estados pela interseção de alguns hiperplanos, dado por

$$\mathcal{X} = \{x | a_k^\top x \leq 1, k \in \mathcal{I}_{n_e}\}, \quad (2)$$

em que  $a_k$  é um vetor de parâmetros constantes  $n$ -dimensional e  $n_e$  é o número de hiperplanos considerados.

### 2.2 Representação Algébrico-Diferencial (DAR)

Coutinho et al. (2008) demonstraram que sistemas racionais podem ser representados a partir de uma DAR, dada a seguir

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1(x, \delta)x + A_2(x, \delta)\pi + A_3(x, \delta) \text{sat}(u), \\ 0 &= \Omega_1(x, \delta)x + \Omega_2(x, \delta)\pi + \Omega_3(x, \delta) \text{sat}(u), \end{aligned} \quad (3)$$

sendo  $\pi \equiv \pi(x, \text{sat}(u), \delta) \in \mathbb{R}^{n_\pi}$  o vetor de não linearidades,  $A_1(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $A_2(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_\pi}$ ,  $A_3(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ ,  $\Omega_1(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n_\pi \times n_x}$ ,  $\Omega_2(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n_\pi \times n_\pi}$  e  $\Omega_3(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n_\pi \times n_u}$  matrizes de funções afins com relação a  $(x, \delta)$ , tal que  $\Omega_2(x, \delta)$  é uma matriz quadrada de posto completo para todo  $(x, \delta) \in \mathcal{X} \times \Delta$ . Considerando que

$\mathcal{X} \times \Delta$  é uma região politópica, as matrizes da DAR podem ser representadas na forma

$$M(x(t), \delta(t)) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_\delta} \alpha_{x(i)}(t) \alpha_{\delta(l)}(t) M_{il},$$

em que  $M(x, \delta)$  representa cada matriz do sistema em (3),  $M_{il}$  representa os valores das matrizes em cada vértice de  $\mathcal{X} \times \Delta$ ,  $N_x$  e  $N_\delta$  representam o número de vértices dos politopos de  $x$  e  $\delta$ , respectivamente, e  $\alpha_{x(i)}(t), \alpha_{\delta(l)}(t) \in \Lambda_1$ .

Observação 1. Uma possível DAR (3) para o sistema (1) pode ser obtida pelo Lema 2.1 de El Ghaoui and Scorletti (1996), juntamente com a relação entre DARs e LFRs proposta por Coutinho et al. (2008). Outro método mais intuitivo é apresentado em Trofino and Dezuo (2014). Em ambos os casos, pode-se verificar a DAR obtida substituindo o vetor de não linearidades  $\pi$  obtido pela equação algébrica nula da DAR

$$\pi = -\Omega_2^{-1}(x, \delta) [\Omega_1(x, \delta)x + \Omega_3(x, \delta)u],$$

na equação diferencial em (3). Desta forma, a equação do sistema (1) é obtida.

Vale ressaltar que mesmo campos vetoriais com funções trigonométricas podem ser aproximados por funções racionais, possibilitando sua descrição na forma de uma DAR. Por outro lado, embora as DARs possibilitem representar uma vasta gama de sistemas não lineares de forma exata, sua formulação não apresenta unicidade, o que pode levar a um certo conservadorismo.

### 2.3 Lei de controle e descrição politópica da saturação

Para a estabilização do sistema, a fim de reduzir o conservadorismo dos resultados obtidos, adota-se a lei de controle não linear descrita da forma:

$$u = K(x)G^{-1}(x)x + R(x)N^{-1}(x)\pi, \quad (4)$$

na qual  $K(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ ,  $G(x) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $R(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_\pi}$  e  $N(x) \in \mathbb{R}^{n_\pi \times n_\pi}$  são matrizes de funções afins em relação a  $x$ , a serem determinadas.

A função de saturação  $\text{sat}(u(t))$  pode ser descrita a partir de um politopo, conforme Hu and Lin (2001), como apresenta o Lema a seguir:

Lema 2. (Hu and Lin (2001)). Seja

$$\mathcal{D} := \{D_r : r = 1, 2, \dots, 2^{n_u}\},$$

um conjunto de matrizes diagonais  $D_r \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ , cujos elementos da diagonal são 0 ou 1, sendo o número de elementos de  $\mathcal{D}$  igual a  $2^{n_u}$ . Considerando  $D_r^- = I_{n_u} - D_r$ , existe um vetor  $v(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ , cujos componentes satisfazem  $|v_s(t)| \leq u_{0(s)}, \forall s \in \mathcal{I}_{n_u}$ , tal que

$$\text{sat}(u(t)) \in \text{co} \{D_r u(t) + D_r^- v(t) : r \in \mathcal{I}_{2^{n_u}}\}. \quad (5)$$

Assim, o vetor de saturação da entrada de controle  $\text{sat}(u(t))$  pode ser representado pela combinação convexa de  $u(t)$  e  $v(t)$ .

Definindo  $v = H(x)G^{-1}(x)x + S(x)N^{-1}(x)\pi$ , com  $H(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$  e  $S(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_\pi}$  matrizes de funções afins em relação a  $x$ , a serem determinadas, é possível representar a função saturação da seguinte forma

$$\text{sat}(u) = [\mathbf{D}K(x) + \mathbf{D}^-H(x)]G^{-1}(x)x + [\mathbf{D}R(x) + \mathbf{D}^-S(x)]N^{-1}(x)\pi, \quad (6)$$

em que  $\mathbf{D} = \sum_r 2^{n_u} \alpha_{d(r)} D_r$ ,  $\mathbf{D}^- = \sum_r 2^{n_u} \alpha_{d(r)} D_r^-$  e  $\alpha_d \in \Lambda_1$ .

Substituindo (6) em (3), a equação do sistema em malha fechada é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathbf{A}_{1\text{cl}}x + \mathbf{A}_{2\text{cl}}\pi, \\ 0 &= \mathbf{\Omega}_{1\text{cl}}x + \mathbf{\Omega}_{2\text{cl}}\pi, \end{aligned} \quad (7)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{1\text{cl}} &= A_1(x, \delta) + A_3(x, \delta)\Phi_1 G^{-1}(x), \\ \mathbf{A}_{2\text{cl}} &= A_2(x, \delta) + A_3(x, \delta)\Phi_2 N^{-1}(x), \\ \mathbf{\Omega}_{1\text{cl}} &= \Omega_1(x, \delta) + \Omega_3(x, \delta)\Phi_1 G^{-1}(x), \\ \mathbf{\Omega}_{2\text{cl}} &= \Omega_2(x, \delta) + \Omega_3(x, \delta)\Phi_2 N^{-1}(x), \\ \Phi_1 &= \mathbf{D}K(x) + \mathbf{D}^-H(x), \\ \Phi_2 &= \mathbf{D}R(x) + \mathbf{D}^-S(x). \end{aligned}$$

### 2.4 Definição do problema

A fim de atingir o objetivo do trabalho, foi utilizada a seguinte função quadrática de Lyapunov candidata

$$V(x) = x^\top P x. \quad (8)$$

em que  $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  é uma matriz definida positiva.

O conjunto de nível associado à função (8) dado pelo elipsóide normalizado  $\mathcal{R} \subset \mathcal{X}$  é definido como

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P x \leq 1\}. \quad (9)$$

Se  $\dot{V} < 0, \forall x \in \mathcal{R} \subset \mathcal{X}, \forall \delta \in \Delta$ , então (8) é uma função de Lyapunov e  $\mathcal{R}$  é um conjunto positivamente invariante com relação ao sistema em malha fechada (7). Assim,  $\mathcal{R}$  é um subconjunto do DoA do sistema em malha fechada, de forma que para todas as condições iniciais  $x(0) \in \mathcal{R}$ ,  $x(t) \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow \infty$  (Khalil, 2002).

Com base no exposto, de maneira mais específica, este trabalho visa propor condições suficientes para resolver o seguinte problema de controle.

Problema 3. Considere o sistema (1) na forma de uma DAR dada em (3). Projetar um controlador (4) tal que  $\forall x(0) \in \mathcal{R}, \forall \delta \in \Delta$ ,  $\mathcal{R}$  seja um conjunto positivamente invariante com relação ao sistema em malha fechada (7) e que  $\mathcal{R}$  tenha o maior volume possível.

## 3. CONDIÇÕES DE ESTABILIZAÇÃO PROPOSTAS

O Teorema 4 a seguir fornece condições suficientes para o projeto de controladores por escalonamento de ganhos (4) para sistemas não lineares (1), com uma estimativa do DoA (9).

Teorema 4. Considere o sistema (1), descrito na forma de uma DAR (3). Para um escalar,  $\gamma > 0$  arbitrário, se existem matrizes  $Q = Q^T > 0, Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, K(x), H(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}, R(x), S(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_\pi}, G(x) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  e  $N(x) \in \mathbb{R}^{n_\pi \times n_\pi}$ , tais que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}^1 & \star & \star \\ \mathcal{A}_{21}^1 & -\gamma \text{He}\{G(x)\} & \star \\ \mathcal{A}_{31}^1 & \mathcal{A}_{32}^1 & \mathcal{A}_{33}^1 \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \star \\ G^\top(x)a_k & \text{He}\{G(x)\} - Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad k \in \mathcal{I}_{n_e}, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} u_{0(s)}^2 & \star & \star \\ H_{2(s)}^\top(x, \delta) & \text{He}\{G(x)\} - Q & \star \\ S_{2(s)}^\top(x, \delta) & \mathcal{B}_{32}^1 & \mathcal{B}_{33}^1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad s \in \mathcal{I}_{n_u}, \quad (12)$$

$$\Omega_2(x, \delta)N(x) + N^\top(x)\Omega_2^\top(x, \delta) < 0, \quad (13)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{11}^1 &= \text{He}\{A_1(x, \delta)G(x) + A_3(x, \delta)\Phi_1\}, \\ \mathcal{A}_{21}^1 &= G(x) - Q + \gamma A_1(x, \delta)G(x) + \gamma A_3(x, \delta)\Phi_1, \\ \mathcal{A}_{31}^1 &= N^\top(x)A_2^\top(x, \delta) + \Phi_2^\top A_3^\top(x, \delta) + \Omega_1(x, \delta)G(x) \\ &\quad + \Omega_3(x, \delta)\Phi_1, \\ \mathcal{A}_{32}^1 &= \gamma N^\top(x)A_2^\top(x, \delta) + \gamma \Phi_2^\top A_3^\top(x, \delta), \\ \mathcal{A}_{33}^1 &= \text{He}\{\Omega_2(x, \delta)N(x) + \Omega_3(x, \delta)\Phi_2\}, \\ \mathcal{B}_{32}^1 &= -\Omega_1(x, \delta)G(x) - \Omega_3(x, \delta)\Phi_1, \\ \mathcal{B}_{33}^1 &= -\text{He}\{\Omega_2(x, \delta)N(x) + \Omega_3(x, \delta)\Phi_2\}, \end{aligned}$$

então, existe uma função de Lyapunov (8) para  $P = Q^{-1}$  e um controlador (4), tal que  $\forall x(0) \in \mathcal{R}$  e  $\delta \in \Delta$ , as trajetórias de  $x(t)$  convergem para a origem quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Prova.** Considerando  $\zeta = [x^\top \quad \dot{x}^\top \quad \pi^\top]^\top$ , pela função de Lyapunov candidata (8) e a equação do sistema em malha fechada (7), tem-se

$$\dot{V} = \dot{x}^\top P x + x^\top P \dot{x} = \zeta^\top \Xi_1 \zeta < 0, \quad (14)$$

$$\Xi_2 \zeta = 0, \quad (15)$$

em que

$$\Xi_1 = \begin{bmatrix} 0 & P & 0 \\ P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Xi_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1cl} & -I & \mathbf{A}_{2cl} \\ \mathbf{\Omega}_{1cl} & 0 & \mathbf{\Omega}_{2cl} \end{bmatrix}.$$

Aplicando o Lema de Finsler, a desigualdade (14) será satisfeita, se para alguma matriz  $L$

$$\Xi_1 + L\Xi_2 + \Xi_2^\top L^\top < 0. \quad (16)$$

Dado  $Q > 0$ , para que as condições (10), (11) e (12) sejam satisfeitas, deve-se obter  $G(x) > 0$ . Além disso, uma vez que a matriz  $\Omega_2(x, \delta)$  possui posto completo pela definição da DAR, para que a desigualdade (13) seja factível a matriz  $N(x)$  também deve ser invertível. Desta forma, escolhendo

$$L = \begin{bmatrix} G^{-1}(x) & \gamma G^{-1}(x) & 0 \\ 0 & 0 & N^{-1}(x) \end{bmatrix}^\top,$$

a condição a seguir é obtida

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}^2 & \star & \star \\ \mathcal{A}_{21}^2 & -\gamma \text{He}\{G^{-1}(x)\} & \star \\ \mathcal{A}_{31}^2 & \gamma \mathbf{A}_{2cl}^\top G^{-1}(x) & \text{He}\{N^{-\top}(x)\mathbf{\Omega}_{2cl}\} \end{bmatrix} < 0,$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{11}^2 &= \text{He}\{G^{-\top}(x)\mathbf{A}_{1cl}\}, \\ \mathcal{A}_{21}^2 &= P - G^{-1}(x) + \gamma G^{-\top}(x)\mathbf{A}_{1cl}, \\ \mathcal{A}_{31}^2 &= \mathbf{A}_{2cl}^\top G^{-1}(x) + N^{-\top}(x)\mathbf{\Omega}_{1cl}, \end{aligned} \quad (17)$$

Aplicando uma transformação de congruência, multiplicando a desigualdade anterior à direita e à esquerda por  $\text{diag}\{G^\top(x), G^\top(x), N^\top(x)\}$  e sua transposta, respectivamente, considerando a propriedade de que

$$G^\top(x)PG(x) \geq \text{He}\{G(x)\} - P^{-1}, \quad (18)$$

e definindo  $Q = P^{-1}$ , obtém-se a condição (10), a qual assegura a condição (14), e, portanto, que a origem do sistema é localmente assintoticamente estável.

A fim de garantir a estabilidade regional, é necessário assegurar que  $\mathcal{R} \subset \mathcal{X}$ . Esta inclusão será satisfeita se  $|a_k^\top x| \leq 1, \forall x : V(x) \leq 1, k \in \mathcal{I}_{n_e}$ , ou

$$x^\top a_k a_k^\top x \leq 1, \quad \forall x : x^\top P x \leq 1.$$

Utilizando o Procedimento-S, esta condição pode ser reformulada como

$$a_k a_k^\top - P \leq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \star \\ a_k & P \end{bmatrix} \geq 0,$$

onde o complemento de Schur foi usado.

Aplicando uma transformação de congruência, multiplicando a desigualdade anterior à direita e à esquerda por  $\text{diag}\{1, G^\top(x)\}$  e sua transposta, respectivamente, considerando a propriedade (18) e estabelecendo  $Q = P^{-1}$ , obtém-se a condição (11).

Por fim, deve-se garantir que o Lema 2 seja satisfeito, assegurando que  $|v_{(s)}(t)| \leq u_{0(s)}, \forall x \in \mathcal{R}, s \in \mathcal{I}_{n_u}$ , ou, com  $\xi = [x^\top \quad \pi^\top]^\top$ , deve-se verificar que:

$$\xi^\top \Upsilon^\top \Upsilon \xi \leq u_{0(s)}^2, \quad \forall x : x^\top P x \leq 1,$$

em que  $\Upsilon = [H_{(s)}(x)G^{-1}(x) \quad S_{(s)}(x)N^{-1}(x)]$ .

Multiplicando a primeira desigualdade por  $u_{0(s)}^{-2}$  e aplicando o Procedimento-S, tem-se

$$\xi^\top (\mathcal{U} - \mathcal{P}) \xi \leq 0, \quad (19)$$

em que

$$\mathcal{U} = \Upsilon^\top u_{0(s)}^{-2} \Upsilon, \quad \mathcal{P} = \text{diag}\{P, 0\}.$$

Pela DAR do sistema em malha fechada (7)

$$[\mathbf{\Omega}_{1cl} \quad \mathbf{\Omega}_{2cl}] \xi = 0. \quad (20)$$

Utilizando o Lema de Finsler a partir de (19) e (20), obtém-se:

$$\mathcal{U} - \mathcal{P} + J[\mathbf{\Omega}_{1cl} \quad \mathbf{\Omega}_{2cl}] + [\mathbf{\Omega}_{1cl} \quad \mathbf{\Omega}_{2cl}]^\top J^\top \leq 0.$$

Definindo  $J = [0 \quad N^{-1}(x)]^\top$ , a desigualdade anterior pode ser reformulada como

$$\Upsilon^\top u_{0(s)}^{-2} \Upsilon - \begin{bmatrix} P & \star \\ -N^{-\top}(x)\mathbf{\Omega}_{1cl} & -\text{He}\{N^{-\top}(x)\mathbf{\Omega}_{2cl}\} \end{bmatrix} \leq 0.$$

Aplicando o complemento de Schur, tem-se

$$\begin{bmatrix} u_{0(s)}^2 & \star & \star \\ G^{-\top}(x)H_{(s)}^\top(x) & P & \star \\ N^{-\top}(x)S_{(s)}^\top(x) & -N^{-\top}(x)\mathbf{\Omega}_{1cl} & -\text{He}\{N^{-\top}(x)\mathbf{\Omega}_{2cl}\} \end{bmatrix} \geq 0.$$

Por fim, a partir de uma transformação de congruência, multiplicando a desigualdade anterior pela matriz  $\text{diag}\{1, G^\top(x), N^\top(x)\}$  e sua transposta, à direita e à esquerda, respectivamente, considerando mais uma vez a

propriedade (18) e estabelecendo  $Q = P^{-1}$ , é possível obter a condição (12).

Note que a condição (13) é necessária apenas para assegurar a invertibilidade da matriz  $N(x)$ .

□

No Corolário a seguir, o Teorema 4 pode ser usado para resolver o Problema 3, conforme descrito anteriormente.

Corolário 5. Dado um escalar positivo  $\gamma > 0$ . Se existir uma matriz simétrica  $Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x} > 0$  e matrizes  $K(x), H(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ ,  $R(x), S(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_\pi}$ ,  $G(x) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  e  $N(x) \in \mathbb{R}^{n_\pi \times n_\pi}$  que satisfaçam o seguinte problema de otimização para todo  $\delta \in \Delta$  e  $x \in \mathcal{X}$ :

$$\begin{cases} \max \{\log(\det(Q))\} \\ \text{sujeito a (10) - (13)}, \end{cases} \quad (21)$$

então o controlador (4) estabiliza assintoticamente o sistema em malha fechada, composto por (3) e (4), em torno da origem, e o conjunto  $\mathcal{R}$  dado em (9), considerando  $P = Q^{-1}$  é uma estimativa do DoA.

Note que no Teorema 4, as desigualdades são polinomialmente dependentes de  $(x, \delta)$ . Desta forma, o Lema 6 a seguir apresenta a estratégia de relaxação utilizada a fim de converter as condições propostas em um conjunto de LMIs.

Lema 6. (Adaptado de Wang et al. (1996)). Considere matrizes  $\Psi_{ijl}^r$ ,  $i, j \in \mathcal{I}_{N_x}$ ,  $l \in \mathcal{I}_{N_\delta}$ , e  $r \in \mathcal{I}_{N_u}$ , de dimensões apropriadas, tais que

$$\Psi(x(t), \delta(t)) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_\delta} \sum_{r=1}^{N_u} \alpha(t) \Psi_{ijl}^r < 0, \quad (22)$$

em que  $\alpha(t) = \alpha_{x(i)}(t) \alpha_{x(j)}(t) \alpha_{\delta(l)}(t) \alpha_{d(r)}$ .

Se as seguintes LMIs forem factíveis para todo  $i, j \in \mathcal{I}_{N_x}$ ,  $l \in \mathcal{I}_{N_\delta}$  and  $r \in \mathcal{I}_{N_u}$

$$\begin{cases} \Psi_{iil}^r < 0, & i = j, \\ \Psi_{ijl}^r + \Psi_{jil}^r < 0, & i < j, \end{cases} \quad (23)$$

então a desigualdade (22) é satisfeita.

A prova completa do Lema 6 pode ser vista em Reis et al. (2021).

#### 4. EXEMPLO NUMÉRICO

Nesta seção é apresentado um exemplo numérico de aplicação das condições de síntese de controladores proposta no Teorema 4. Os resultados foram obtidos usando o parser YALMIP, em conjunto com o solver MOSEK, executado no software MATLAB<sup>®</sup>.

O problema considerado trata da estabilização de um sistema não linear incerto adaptado de Oliveira et al. (2012), dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= ((1 + \delta) + x_1^2)x_1 + (2 + 8x_2^2)x_2 + \text{sat}(u), \end{aligned} \quad (24)$$

cuja DAR (3) pode ser obtida com

$$\begin{aligned} \pi &= [x_1^2 \quad x_2^2]^T, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 + \delta & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_1 & 8x_2 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega_1 = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = -I_2, \quad \Omega_3 = 0_{2 \times 1}. \end{aligned}$$

Note que a incerteza não é considerada em Oliveira et al. (2012). Desta forma, em um primeiro momento, vamos assumir que  $\delta = 0$  para fins de comparação. Definindo também o mesmo limite para a saturação da entrada de controle  $u_0 = 1,96$ , utilizado em Oliveira et al. (2012), o problema de otimização (21) foi solucionado para diferentes valores de  $\gamma$  a fim de maximizar o DoA estimado. Os resultados obtidos são comparados com aqueles apresentados por Oliveira et al. (2012) e Azizi et al. (2018) na Tabela 1.

Tabela 1. Características dos DoAs estimados obtidos para o sistema (24) controlado.

Metodologia	Limites de $\mathcal{X}$	$\log(\det(Q))$
Oliveira et al. (2012)	$ x_1  \leq 0,61,  x_2  \leq 0,35$	-3,5375
Azizi et al. (2018)	$ x_1  \leq 0,74,  x_2  \leq 0,46$	-2,2626
<b>Teorema 4</b>	<b><math> x_1  \leq 0,90,  x_2  \leq 0,48</math></b>	<b>-1.9103</b>

A partir da Tabela 1, é possível verificar que a abordagem proposta fornece um DoA elipsoidal estimado de maior volume, em comparação com os resultados apresentados anteriormente na literatura que utilizaram DARs, em detrimento de um aumento da complexidade computacional. Neste caso, utilizando a metodologia proposta, o número de variáveis do problema de otimização foi 67, sendo 270 o número de linhas de LMI.

A Figura 1 mostra o maior DoA estimado a partir do Teorema 4 (linha sólida azul) e os DoAs obtidos por Azizi et al. (2018) (linha pontilhada magenta) e Oliveira et al. (2012) (linha tracejada preta). O maior valor obtido para a função objetivo é  $\log(\det(Q)) = -1.9103$ , com  $\mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 0,90, |x_2| \leq 0.48\}$ , conforme a Tabela 1, para  $\gamma = 0,001$ .

Além disso, a Figura 1 também apresenta algumas trajetórias do sistema em malha fechada a partir do controlador projetado, iniciando dentro da região correspondente ao máximo DoA estimado. Observe que todas as trajetórias começam no limite desta região e convergem para a origem.

Em uma segunda análise, consideramos a incerteza no sistema e investigamos a influência de sua variação no tamanho do DoA elipsoidal estimado para uma mesma região  $\mathcal{X}$ . A Figura 2 mostra o efeito do crescimento do limite de incerteza na estimativa do DoA máximo obtido, o qual se torna cada vez menor quanto maior o valor de  $|\delta|$ .

#### 5. CONCLUSÃO

Este artigo propôs novas condições LMIs para projeto de controladores por realimentação de estados com estimativa de DoA para uma classe de sistemas não lineares, em tempo contínuo, sujeitos a saturação na entrada de controle, e descritos na forma de DAR. Nesta abordagem, incluiu-se as não linearidades do sistema na lei de controle, o que proporcionou a redução no conservadorismo dos resultados obtidos com relação a outras abordagens da literatura que utilizaram DAR. Um exemplo numérico ilustra a eficácia e as vantagens do método proposto.

Como propostas de continuidade, outras funções candidatas de Lyapunov não quadráticas podem vir a ser investigadas. Além disso, a influência da não-unicidade das DARs

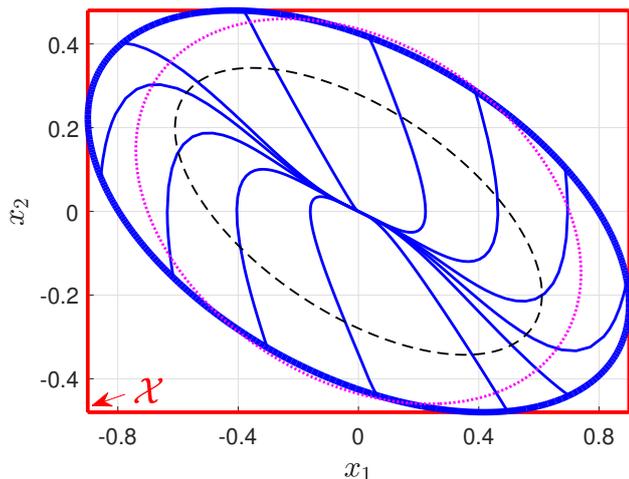


Figura 1. DoAs estimados para o sistema (24) pelo Teorema 4 e algumas trajetórias dos estados (linha sólida azul), Azizi et al. (2018) (linha pontilhada magenta) e Oliveira et al. (2012) (linha tracejada preta).

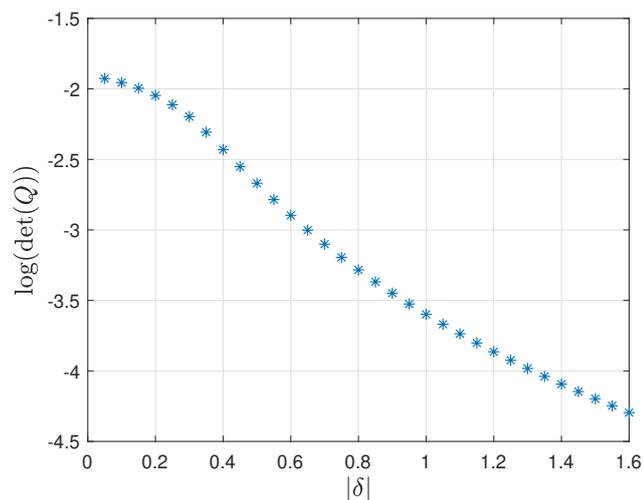


Figura 2. Variação do tamanho do DoA estimado pelo crescimento dos limites da incerteza.

sobre os resultados obtidos permanece como um tópico em aberto.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Processo 305578/2022-7.

#### REFERÊNCIAS

Azizi, S., Torres, L.A.B., and Palhares, R.M. (2018). Regional robust stabilisation and domain-of-attraction estimation for MIMO uncertain nonlinear systems with input saturation. *International Journal of Control*, 91(1), 215–229. doi:10.1080/00207179.2016.1276634.

Boyd, S., Boyd, S.P., and Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.

Coutinho, D. and Souza, C.E. (2013). Local stability analysis and domain of attraction estimation for a class of uncertain nonlinear discrete-time systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 23(13), 1456–1471. doi:10.1002/rnc.2833.

Coutinho, D., Fu, M., Trofino, A., and Danes, P. (2008).  $\mathcal{L}_2$ -gain analysis and control of uncertain nonlinear systems with bounded disturbance inputs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18(1), 88–110.

Coutinho, P.H.S., Araújo, R.F., Nguyen, A.T., and Palhares, R.M. (2020). A multiple-parameterization approach for local stabilization of constrained Takagi-Sugeno fuzzy systems with nonlinear consequents. *Information Sciences*, 506, 295–307. doi:10.1016/j.ins.2019.08.008.

El Ghaoui, L. and Scorletti, G. (1996). Control of rational systems using linear-fractional representations and linear matrix inequalities. *Automatica*, 32(9), 1273–1284.

Gomes da Silva Jr., J.M., Oliveira, M., Coutinho, D., and Tarbouriech, S. (2014). Static anti-windup design for a class of nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(5), 793–810. doi:10.1002/rnc.2917.

Hu, T. and Lin, Z. (2001). *Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design*. Birkhäuser Boston, Boston, MA, USA.

Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 3rd edition.

Oliveira, M.Z., Gomes da Silva Jr., J.M., and Coutinho, D. (2012). State feedback design for rational nonlinear control systems with saturating inputs. In *Proceedings of IEEE American Control Conference*, 2331–2336. doi:10.1109/ACC.2012.6315101.

Oliveira, M.Z., Gomes da Silva Jr, J.M., and Coutinho, D. (2013a). Regional stabilization of rational discrete-time systems with magnitude control constraints. In *Proceedings of IEEE American Control Conference*, 241–246.

Oliveira, M.Z., Gomes da Silva Jr., J.M., and Coutinho, D. (2013b). Stability analysis for a class of nonlinear discrete-time control systems subject to disturbances and to actuator saturation. *International Journal of Control*, 86(5), 869–882. doi:10.1080/00207179.2013.765036.

Reis, G.L., Araújo, R.F., Torres, L.A., and Palhares, R.M. (2021). Gain-scheduled control design for discrete-time nonlinear systems using difference-algebraic representations. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(5), 1542–1563. doi:10.1002/rnc.5362.

Tarbouriech, S., Garcia, G., Gomes da Silva Jr., J.M., and Queinnec, I. (2011). *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. Springer, London, UK.

Trofino, A. and Dezuio, T. (2014). LMI stability conditions for uncertain rational nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(18), 3124–3169. doi:10.1002/rnc.3047.

Wang, H.O., Tanaka, K., and Griffin, M.F. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. *IEEE transactions on Fuzzy Systems*, 4(1), 14–23. doi:10.1109/91.481841.