

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA**

PAULO VICTOR POND IBERNON

**DESENVOLVIMENTO DO CONTROLE DE POSIÇÃO DE UM
PÊNDULO INVERTIDO COM RODA DE REAÇÃO UTILIZANDO
REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS**

Manaus
2019

PAULO VICTOR POND IBERNON

DESENVOLVIMENTO DO CONTROLE DE POSIÇÃO DE UM
PÊNDULO INVERTIDO COM RODA DE REAÇÃO UTILIZANDO
REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

Pesquisa desenvolvida durante a disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II e apresentada à banca avaliadora do Curso de Engenharia de Controle e Automação da Escola Superior de Tecnologia da Universidade do Estado do Amazonas, como pré-requisito para obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação.

Orientador: Israel Mazaira Morales, Dr.

Manaus
2019

PAULO VICTOR POND IBERNON

DESENVOLVIMENTO DO CONTROLE DE POSIÇÃO DE UM
PÊNDULO INVERTIDO COM RODA DE REAÇÃO UTILIZANDO
REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

Pesquisa desenvolvida durante a disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II e apresentada à banca avaliadora do Curso de Engenharia de Controle e Automação da Escola Superior de Tecnologia da Universidade do Estado do Amazonas, como pré-requisito para obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação.

Nota obtida: 9.85 (Nove ponto oitenta e cinco)

Aprovada em 25/06/2019



.....
Israel Mazaira Morales



.....
Cleto Cavalcante De Souza Leal

p/



.....
Luiz Delfin Rojas Puron

Manaus

2019

AGRADECIMENTO

A Deus, que tem nos abençoado com a facilidade para obtenção do conhecimento e tem nos dado condições de concluir este trabalho. Agradeço aos meus pais, Paulo e Sônia, que me apoiaram desde o início da graduação, atuando como facilitadores deste trabalho. Meus amigos e irmãos que se esforçaram em me ajudar na medida do possível.

Agradeço à minha família em geral, que sempre presente, ajudou tanto financeira como moral e espiritualmente, sempre em oração pelo sucesso da pesquisa. Por se disporem a abdicar de algumas programações em família em prol do tempo necessário para redação e estudo.

Agradeço à Universidade do Estado do Amazonas por proporcionar as condições para estudo teórico e prático no decorrer do curso; ao meu orientador, Israel Mazaira Morales, por fornecer todo o apoio, orientação técnica e teórica que eu precisava para a realização deste trabalho, ao Me. Charles Melo (*In Memoriam*) por todo o suporte quando necessário, ao Me. Moisés Bastos pelo suporte e ajuda na utilização do laboratório de sistemas micro-processados e impressão 3D e a todo corpo docente da Escola Superior de Tecnologia.

RESUMO

Esta pesquisa apresenta a modelagem matemática, simulação e a construção de um protótipo de um pêndulo invertido acionado por roda de reação. A partir da observação da quantidade de aplicações físicas de controladores linearizados em comparação ao controle por realimentação de estados em meio acadêmico, optou-se pela realização de um controlador que adequasse um sistema não-linear a um controle por realimentação de estados. Para tanto, foram utilizadas técnicas de controle não-linear com base em controle de energia mecânica e linearização no ponto de equilíbrio invertido. O protótipo foi projetado com o propósito de facilitar sua fabricação e montagem, através de materiais leves, impressos em 3D. A partir das equações matemáticas desenvolvidas em modelagem, foi possível aplicar o controle por realimentação de estados ao sistema, tanto em simulação como no protótipo e os resultados de desempenho foram avaliados em termos das definições impostas em projeto. Foram consideradas ainda algumas adaptações do pêndulo para facilitar seu controle, visando não alterar drasticamente seus parâmetros físicos.

Palavras-chave: Controle não-linear; Realimentação de Estado; Rodas de Reação; Pêndulo Invertido.

ABSTRACT

This paper presents the mathematical modeling, simulation and construction of a prototype of an inverted pendulum driven by a reaction wheel. From the observation of the number of physical applications of linearized controllers in comparison to state feedback controllers in academic environment, a controller was chosen that adapted a non-linear system to a state feedback control. For that, non-linear control techniques based on mechanical energy control and linearization at the inverted equilibrium point were used. The prototype was designed with the purpose of facilitating its manufacture and assembly, through light materials, printed in 3D. From the mathematical equations developed in modeling, it was possible to apply state feedback control to the system, both in simulation and in the prototype, and the performance results were evaluated in terms of the definitions imposed in the design. It was also considered some adaptations of the pendulum to facilitate its control, aiming not to drastically alter its physical parameters.

Keywords: Non-linear Control; State Feedback; Reaction Wheels; Inverted Pendulum.

Lista de Figuras

1	Controle de Levantamento não-linear	17
2	Protótipo desenvolvido por Werner	18
3	Dinâmica do Sistema com 6 graus de liberdade	19
4	Pêndulo Simples	20
5	Pêndulo Físico	21
6	Resposta Temporal de Sistema Subamortecido	22
7	Segway X2 SE	23
8	Pêndulo Invertido	24
9	<i>Cart-Pole</i>	24
10	Retrato de Fase de um sistema não-linear	25
11	Simulação de Pêndulo	26
12	Comportamento de Pêndulo em diferentes situações iniciais	27
13	Diagrama de corpo livre de um <i>acrobot</i>	28
14	Esquema de um pêndulo com roda de reação	30
15	Torques Atuantes em uma Roda de Reação	31
16	Áreas de Controle de Energia do Pêndulo	31
17	Aplicação Básica de controlador <i>Bang-Bang</i>	32
18	Exemplo de Controlador <i>Fuzzy</i>	33
19	Energia total de pêndulo durante o levantamento	33
20	Roda de Reação utilizada em satélite espacial	34
21	Diferentes Representações de Sistema Dinâmico	35
22	Arduinos Mega, Uno, Nano, Pro-Mini (da esquerda para direita)	39
23	Interface do <i>software</i> Simulink [®]	40
24	Arquitetura do Sistema	41
25	Ciclo do Sinal de Controle	42
26	Metodologia Utilizada	43
27	Arduino Mega	44
28	<i>Driver</i> BTS7960	45
29	Motor DC AK555	45

30	Encoder PD3806-400BM-G5-24C	46
31	Modelo 3D do Protótipo	48
32	Peças impressas em 3D	49
33	Protótipo finalizado	49
34	Esquemático da placa produzida	50
35	Placa de Circuito Finalizado	50
36	Diagrama de Corpo Livre do Protótipo	51
37	Diagrama de Blocos da Planta Modelada	56
38	Diagrama de Blocos do Controle de Levantamento	58
39	Tempo de Repouso	59
40	Resposta ao Degrau dos polos escolhidos	62
41	Diagrama de Blocos da Simulação	64
42	Sinal de Saída dos <i>Encoders</i>	66
43	Método de medição de posição com <i>Encoder</i> de quadratura	66
44	Diagrama de Blocos de Medição da Posição	67
45	Sinais adquiridos de posição	67
46	Diagrama de Blocos de Medição da Velocidade	68
47	Sinais adquiridos de velocidade	69
48	Sinais adquiridos de velocidade e posição comparados	69
49	Diagrama de Blocos para acionamento do motor	70
50	Resposta do Motor ao Sinal Senoidal	70
51	Resposta do Motor ao Sinal Degrau	71
52	Resposta do Motor ao Sinal de Onda Quadrada	71
53	Diagrama de Blocos para acionamento do motor com filtro	72
54	Resposta do Motor com filtro ao Sinal Senoidal	72
55	Resposta do Motor com filtro ao Sinal Degrau	73
56	Resposta do Motor com filtro ao Sinal de Onda Quadrada	73
57	Sinal filtrado e não filtrado	74
58	Diagrama de Blocos Final do Protótipo com controle	74
59	Posição do pêndulo quando aplicado Sinal de onda quadrada	75
60	Dinâmica livre do Pêndulo	76
61	Dinâmica no Motor	76
62	Controle do Pêndulo - Simulação	78
63	Energia Total do Sistema	78
64	Energias Cinética e Potencial durante a simulação	79
65	Diagrama de Blocos da planta com Distúrbio	80
66	Resposta do Pêndulo ao Distúrbio	81
67	Resposta do Pêndulo ao Distúrbio Acima do limite máximo	81
68	Atuação da Realimentação de Estados na simulação	82

69	Amplitude de movimento do protótipo com roda de reação	83
70	Protótipo Adaptado	83
71	Controle de Levantamento do protótipo	84
72	Energias Cinética e Potencial do Protótipo	85

Lista de Abreviaturas e Siglas

A	Ampère
cm	centímetro
g	grama
IDE	<i>Integrated Development Environment</i> , Ambiente de Desenvolvimento Integrado
kg	kilograma
kgf	kilograma-força
kHz	kiloHertz
KRE	pesquisar
LED	<i>Light Emitting Diode</i> , Diodo Emissor de Luz
m	metro
mA	miliampere
MATLAB	<i>Matrix Laboratory</i> , Laboratório de Matrizes
MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i> , Múltiplas Entradas Múltiplas Saídas
mm	milímetro
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i> , Modulação por Largura de Pulso
rad	radiano
rpm	rotações por minuto
s	segundo
SISO	<i>Single Input Single Output</i> , Entrada Única Saída Única
V	Volt
W	Watt

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	PROBLEMA DE PESQUISA	13
1.2	HIPÓTESE	14
1.3	JUSTIFICATIVA	14
1.4	OBJETIVO GERAL	14
1.4.1	Objetivos Específicos	14
1.5	METODOLOGIA	14
1.6	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	15
2	TRABALHOS RELACIONADOS	17
2.1	O PÊNDULO COM RODA DE REAÇÃO	17
2.2	PÊNDULO ACIONADO COM RODA DE REAÇÃO	18
2.3	CONTROLE DE PÊNDULO INVERTIDO COM 6 GRAUS DE LIBERDADE	19
3	REFERENCIAL TEÓRICO	20
3.1	PÊNDULOS	20
3.1.1	Pêndulos Invertidos	22
3.1.2	<i>Acrobots</i>	27
3.2	RODAS DE REAÇÃO	28
3.3	ESPAÇO DE ESTADO	34
3.3.1	Controlabilidade e Observabilidade	37
3.3.2	Realimentação de Estados	37
3.4	MICROCONTROLADORES	37
3.4.1	Arduino	38
3.5	SIMULINK®	39
4	METODOLOGIA	41
4.1	ARQUITETURA DO SISTEMA PROPOSTO	41

4.2	MÉTODOS APLICADOS	42
4.3	MATERIAIS UTILIZADOS	44
4.3.1	<i>Softwares</i> utilizados	44
4.3.2	<i>Hardware</i> e componentes utilizados	44
4.3.3	Transmissão de Dados	46
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	48
5.1	PROJETO DO PÊNDELO	48
5.2	PROJETO DA PLACA DE CONTROLE DO PÊNDELO	49
5.3	MODELAGEM MATEMÁTICA	51
5.3.1	Linearização da Planta	54
5.4	PROJETO DO CONTROLADOR	56
5.4.1	Controle de Levantamento	56
5.4.2	Definição dos Parâmetros físicos	58
5.4.3	Controle de Estabilidade	60
5.4.4	Discretização	64
5.5	AQUISIÇÃO DE DADOS E ACIONAMENTO DO MOTOR	65
5.5.1	Posição	65
5.5.2	Velocidade	68
5.5.3	Acionamento do Motor	69
5.6	PROVA DE CONCEITO	75
5.7	VALIDAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA	75
5.8	RESULTADOS DA SIMULAÇÃO	77
5.9	RESULTADOS DO TESTE DO PROTÓTIPO	82
	CONCLUSÕES	86
	REFERÊNCIAS	87
	APÊNDICE A - DESENHOS TÉCNICOS DAS PEÇAS PROJETADAS	90
	APÊNDICE B - CÓDIGOS MATLAB®	93
	APÊNDICE C - CÓDIGOS DE CONTROLE NO ARDUINO	96

1 INTRODUÇÃO

No atual cenário das pesquisas acadêmicas voltadas a controladores, sua grande maioria se utiliza dos controladores clássicos como o PID, enquanto que uma menor parte se dedica ao estudo e implementação dos demais tipos de controladores como: Realimentação do Estados, *Fuzzy*, Redes neurais e demais técnicas para controle robusto e adaptativo.

Por outro lado, do ponto de vista de pêndulos invertidos, há a necessidade da aplicação em termos não-lineares para os controladores, mesmo que haja uma linearização em torno de algum ponto. Enquanto isso, nos projetos acadêmicos de pêndulos, em sua grande maioria, o controle ocorre no pivoteamento dos sistemas, sejam eles de 1, 2 ou mais graus de liberdade.

Nesse contexto, esta pesquisa busca trazer para o meio acadêmico uma contribuição em termos de método de controle aplicado e tipos de sistemas de controle para pêndulo. Foi escolhido um controle por roda de reação. Além de existirem diversos tipos de técnicas usadas para o controle de pêndulos, a técnica que utiliza roda de reação leva uma certa vantagem, visto que pode-se haver um controle de energia para a elevação do pêndulo, o que possibilita uma redução do tamanho físico do motor.

Motores menores, com torque transmitido controlado acarretam ainda num menor custo para o projeto final. Outras técnicas de controle funcionam adequadamente quando se tem bastante torque disponível nos atuadores. Além disso, a utilização de rodas de reação em sistemas de controle remete ao início da exploração espacial visto que o controle de atitude de satélites é uma das principais soluções encontradas para economia de materiais, combustível e gases comprimidos.

Sistemas dinâmicos cada vez mais complexos requerem a utilização de um controle mais complexo, muitas vezes não bastando apenas as técnicas de controle clássico e geralmente requerindo a utilização de *softwares* numéricos específicos. A união entre realimentação de estados com o sistema dinâmico com pêndulos e rodas de reação possibilita uma dinâmica diferente das convencionais, onde quatro estados do sistema não-linear são alterados pela mesma entrada controlada, considerando apenas um sistema com dois graus de liberdade. Para os casos comerciais de conjuntos de rodas de reação, que utilizam, geralmente, quatro rodas, o projeto de controle se torna mais complexo ainda.

1.1 PROBLEMA DE PESQUISA

A quantidade reduzida de pesquisas acadêmicas relacionando sistemas dinâmicos não-lineares com técnicas de controle utilizando realimentação de estados quando comparada à quantidade de pesquisas voltadas para o controle linear clássico. E a não-linearidade de pêndulos com controle na extremidade livre do mesmo.

1.2 HIPÓTESE

É possível a construção de um pêndulo invertido com 2 graus de liberdade sendo controlado por realimentação de espaço de estados através do *software* Simulink[®] em conjunto com o microcontrolador Arduino para controle em torno do ângulo π rad (180°).

1.3 JUSTIFICATIVA

A pesquisa nos traz a possibilidade da implementação de uma aplicação física de controladores em sistemas não-lineares, que muitas vezes pode ser um problema devido à qualidade da modelagem matemática e o próprio projeto do controlador. Busca-se ainda uma contribuição no que diz respeito à comunicação e tratamento de dados entre *hardware* e *software* utilizados, de modo que o controlador possa atuar de forma satisfatória no sistema modelado e construído. Além disto, a pesquisa oferece uma ampla oportunidade para experiência prática nas áreas de estudo da Engenharia de Controle e Automação, como: Controle e Automação I e II; Controle não-linear; Controle Digital e Discreto; Modelagem e simulação de sistemas dinâmicos; Robótica Industrial; Microcontroladores e Microprocessadores; Eletrônica Digital e Analógica; Circuitos Elétricos e Mecânica I.

1.4 OBJETIVO GERAL

Desenvolvimento do controle de posição do pêndulo ao redor do ângulo π rad (180°) utilizando realimentação de estados.

1.4.1 Objetivos Específicos

- Modelar e simular o sistema e o protótipo em Malha Aberta e Malha Fechada.
- Projetar e Fabricar um protótipo funcional de pêndulo invertido para testes físicos.
- Aplicar um controle por realimentação de estados na planta modelada e no protótipo de forma a atingir as especificações impostas por projeto.
- Comunicar programa Simulink[®] com *encoders* e motor através de microcontrolador Arduino.

1.5 METODOLOGIA

O trabalho apresentado é uma pesquisa aplicada, e tem como objetivo a realização de pesquisa exploratória sobre o material bibliográfico adquirido sobre o assunto. É utilizado o procedimento técnico de pesquisa bibliográfica e experimental. O método de abordagem utilizado é o hipotético-dedutivo e o método de procedimento de elaboração

é o monográfico. Para a coleta de dados é utilizada observação direta, bem como documentação indireta, e a análise e interpretação de seus dados é qualitativa.

Inicialmente foram feitas pesquisas bibliográficas na área de modelagem matemática de sistemas dinâmicos, com ênfase em sistemas não-lineares, como o pêndulo; comunicação entre plataforma Arduino e o programa MATLAB[®], rodas de reação, controle de motores elétricos de corrente contínua e simulação no programa Simulink[®]. As pesquisas bibliográficas serviram de embasamento para a elaboração do protótipo.

Após modelagem matemática e projeto de controlador, os resultados foram avaliados em termos de precisão e velocidade de resposta do sistema, em seguimento dos parâmetros estabelecidos em projeto.

1.6 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho se divide em 5 capítulos para o melhor entendimento do leitor, além das conclusões e apêndices. A divisão ocorre da seguinte forma:

- Capítulo 1 - Introdução: Neste capítulo são apresentadas informações gerais do trabalho, sua motivação, seus objetivos e justificativas e uma breve explanação da metodologia utilizada.
- Capítulo 2 - Trabalhos Relacionados: Neste tópico serão apresentados alguns trabalhos que se assemelham a este e serviram de base para a realização do mesmo, assim como suas principais diferenças, seus métodos de resolução e resultados obtidos.
- Capítulo 3 - Referencial Teórico: Todas as tecnologias e teorias utilizadas no desenvolvimento da pesquisa serão abordadas de forma específica. Serão tratadas todas as áreas de conhecimento necessárias para a realização do projeto de um controlador de um pêndulo invertido, assim como a utilização de rodas de reação.
- Capítulo 4 - Metodologia: O capítulo trata de todos os materiais e tecnologias utilizados durante todo o projeto, no seu desenvolvimento, assim como os métodos empregados na resolução dos problemas encontrados no decorrer da pesquisa.
- Capítulo 5 - Resultados e Discussões: Aqui serão apresentados todas as contribuições deste trabalho para o meio acadêmico e científico como modelos, diagramas gerados, projeto do pêndulo e os resultados obtidos com as simulações e no protótipo montado, assim como uma análise dos dados adquiridos em relação às especificações impostas por projeto.
- Conclusões - Definição do que pode ser concluído com os resultados obtidos e uma perspectiva para trabalhos a serem realizados com base no presente projeto, descrevendo as dificuldades encontradas e oportunidades de melhoria identificadas.

- Apêndices - Informações adicionais do projeto para compreensão mais detalhadas sobre tudo o que foi discorrido ao longo da pesquisa.

2 TRABALHOS RELACIONADOS

2.1 O PÊNDULO COM RODA DE REAÇÃO

O trabalho desenvolvido por Navarro e Sun (2013) trata-se do controle de um pêndulo invertido acionado por roda de reação utilizando controle PID e compensadores. A ideia principal do trabalho é desenvolver a simulação de um pêndulo desde sua modelagem matemática e aplicar o controle para estabilidade na posição π rad.

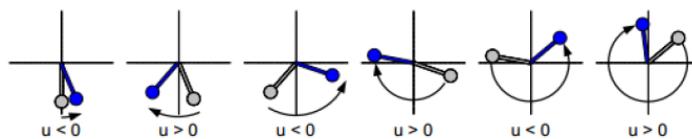
O sistema proposto conta com um atuador, no caso a roda de reação, acionada por um motor de 24V em corrente contínua. Para sensoriamento, foram considerados 2 *encoders* ópticos. O primeiro para determinar a posição e velocidade angular do pêndulo, e outro para determinar a posição e velocidade angular da roda de reação, com relação ao pêndulo.

Foi feita a modelagem matemática do sistema dinâmico utilizando as equações lagrangianas, que tem sua fundamentação na quantidade de energia do sistema. Em seguida, após a obtenção do modelo matemático, o sistema foi linearizado no espaço de estados ao redor do ponto de equilíbrio π rad. A partir disso, foi realizado o controle com o auxílio do controlador PI com compensadores para a fricção. Isso se deu pois um controlador proporcional gera uma resposta satisfatória em regime final, e por isso foi adicionado um integrador ao controlador para eliminar o erro em regime permanente. Além disso, foi adicionado ao sistema um observador de estado, pois nem todas as variáveis de estado puderam ser mensuradas, e assim pode-se estimá-las para o controle de estabilidade correto.

Ao fim do trabalho, adicionou-se o controle de levantamento para que o pêndulo pudesse ser iniciado de qualquer ponto, e não somente da posição onde foi linearizado. Os resultados obtidos foram satisfatórios, levando em conta que, em simulação, o pêndulo se manteve na sua posição de equilíbrio, com erro zero devido à inserção do controle proporcional integral.

Para chegar a tais resultados, foram realizados vários cálculos de estabilidade, a partir das equações de espaço de estados. também foi realizado uma realimentação para o desacoplamento dos observadores de estado para que os subsistemas da simulação fossem independentes.

Figura 1 – Controle de Levantamento não-linear



Fonte: (NAVARRO; SUN, 2013, p. 21)

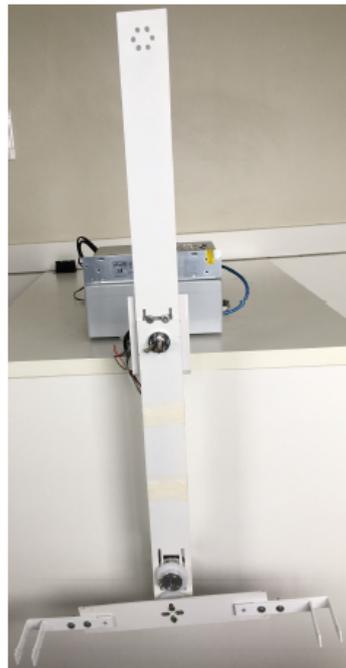
2.2 PÊNULO ACIONADO COM RODA DE REAÇÃO

A pesquisa desenvolvida por Werner (2017) tem como tratativa principal o desenvolvimento completo de protótipo de pêndulo acionado por reação. O objetivo seria modelar matematicamente o sistema e projetar um controlador e um protótipo. Semelhante à presente pesquisa, o trabalho relatado utilizou controle por realimentação do espaço de estados.

O trabalho não mostra muito sobre o protótipo físico, mas pode-se encontrar algumas informações a respeito do *hardware* utilizado. Foram utilizados *enconders* também para a detecção de posição do pêndulo e da roda. Além disso são apresentados dados técnicos do motor utilizado e informações acerca das peças mecânicas projetadas.

Para a aplicação no sistema real, foi necessária a discretização de algumas funções utilizadas no diagrama de blocos. Uma das técnicas foi a de equivalência de polos, nativa do *software* MATLAB[®]. Os resultados obtidos mostram que a estratégia de controle desenvolvida resultou na estabilidade em torno do ângulo π rad por cerca de 1000 amostras de tempo, o que equivale a aproximadamente 5 segundos. Além disso, concluiu-se que a modelagem foi realizada de forma correta para o sistema proposto, contudo a estratégia de controle adotada apresentou limitações quando aplicadas no sistema físico, uma vez que, em simulação, foi satisfatória.

Figura 2 – Protótipo desenvolvido por Werner



Fonte: (WERNER, 2017, p. 20)

2.3 CONTROLE DE PÊNULO INVERTIDO COM 6 GRAUS DE LIBERDADE

Diferentemente dos demais trabalhos apresentados até o momento, Bobrow (2015), em sua dissertação de mestrado realiza toda a modelagem matemática e simulação para um sistema com 6 graus de liberdade, controlado por roda de reação.

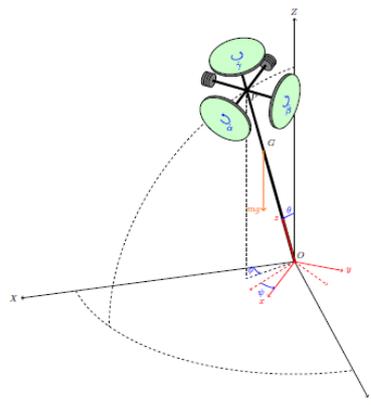
Um pêndulo com roda de reação comum possui 2 graus de liberdade, porém só rotaciona através de um eixo. No caso de Bobrow (2015), o estudo foca-se na possibilidade de rotação nos 3 eixos cartesianos, e devido a isso, o número de graus de liberdade triplica. A figura 3 retrata o mecanismo modelado por ele.

A abordagem de Bobrow consistiu, inicialmente, na separação do sistema, complexo, em 3 subsistemas mais simples, sendo eles: os motores, as rodas de reação, e a haste do pêndulo. Cada subsistema foi modelado individualmente. A modelagem do subsistema da haste tem como entrada o torque útil desenvolvido pelas rodas de reação e como saída os ângulos formados com os eixos coordenados. Foram utilizadas técnicas de matrizes de rotação e os ângulos de Euler, além das equações de Lagrange. A modelagem das rodas de reação foi realizada utilizando as Leis de Newton e a modelagem dos motores, as Leis de Kirchhoff.

Foi feita a análise dinâmica dos subsistemas isolados e do sistema total, por fim a modelagem resultou numa matriz de estados de ordem 12 e numa matriz com 3 saídas, que são justamente os ângulos da haste. Foi escolhido um tipo de controle por realimentação linearizante, visto que o sistema é não-linear.

Foram feitas diversas simulações comparando vários tipos de realimentação, o resultado das simulações mostrou que as realimentações linearizantes possuem picos mais baixos, contudo ambas as técnicas de realimentação apresentam resultados semelhantes e satisfatórios.

Figura 3 – Dinâmica do Sistema com 6 graus de liberdade



Fonte: (BOBROW, 2015, p.11)

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, serão abordadas diversas teorias empregadas no projeto e desenvolvimento de pêndulos invertidos, bom como as tecnologias necessárias para o controle e automação deste sistema.

3.1 PÊNDULOS

Desde a época de Galileu Galilei, o estudo empírico do movimento foi base de muitas perguntas que vierem a ser respondidas somente após a definição das leis do movimento introduzidas por Newton. (BLOCK; ÅSTRÖM; SPONG, 2007) Inicialmente o estudo de pêndulos simples e pêndulos físicos tem sido introduzidos nos estudos mais básicos de física e movimento, como no ensino médio e nos primeiros períodos de graduações.

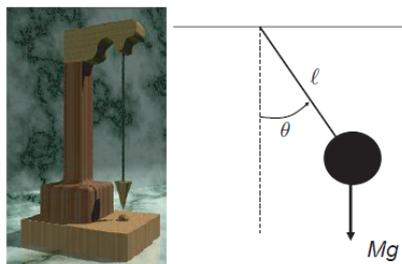
Pêndulos simples, formados somente por uma massa presa a um fio, de massa desprezível, são a forma mais básica para o ensino e por isso, os primeiros a serem ensinados. A razão, deve-se pela simplicidade de sua equação característica não-linear acrescentado pelo termo senoidal

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0 \quad (3.1)$$

onde θ é o deslocamento angular, g a aceleração da gravidade, l o comprimento do pêndulo e $\ddot{\theta}$ a aceleração angular, e para pequenas amplitudes de oscilação ($\theta < 7,5^\circ$), pode ser aproximado por uma equação linear em termos de seu ângulo e aceleração angular. Esta equação é conhecida como equação do oscilador harmônico.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (3.2)$$

Figura 4 – Pêndulo Simples



Fonte: (BLOCK; ÅSTRÖM; SPONG, 2007, p. 3)

Diferentemente do pêndulo simples, um pêndulo físico tem uma distribuição de massa ao longo de todo o seu comprimento. (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2009) Com isso, algumas considerações devem ser feitas com relação à sua modelagem matemática.

Agora, seu movimento não é descrito em função do comprimento de um fio de massa desprezível, mas sim em termos da distância do seu centro de massa ao eixo de giro. E seu período, diferentemente do pêndulo simples, que era expresso em termos da massa, agora será expresso em termos do momento de inércia do objeto.

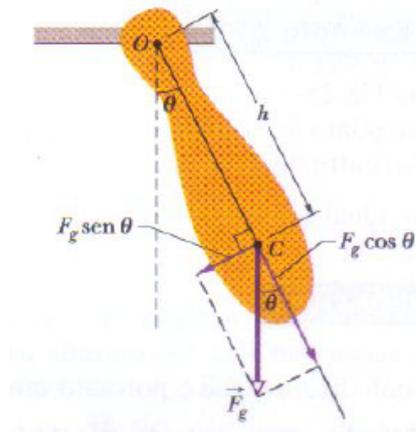
Nos demais aspectos, a análise matemática de um pêndulo físico, ou pêndulo real, como é chamado, pode ser considerada a mesma que descrita anteriormente, inclusive em seu comportamento oscilatório harmônico. A diferença entre a descrição matemática dos períodos de cada tipo de pêndulo podem ser identificadas nas equações 3.3 e 3.4.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \text{ (pêndulo físico)} \quad (3.3)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \text{ (pêndulo simples)} \quad (3.4)$$

Onde T é o período do movimento, I o momento de inércia do pêndulo físico, m a massa do pêndulo, g o módulo da aceleração gravitacional, h a distância entre o centro de massa do pêndulo e seu eixo de giro. L descreve o comprimento do fio do pêndulo simples. A figura 5 descreve um modelo de pêndulo físico.

Figura 5 – Pêndulo Físico



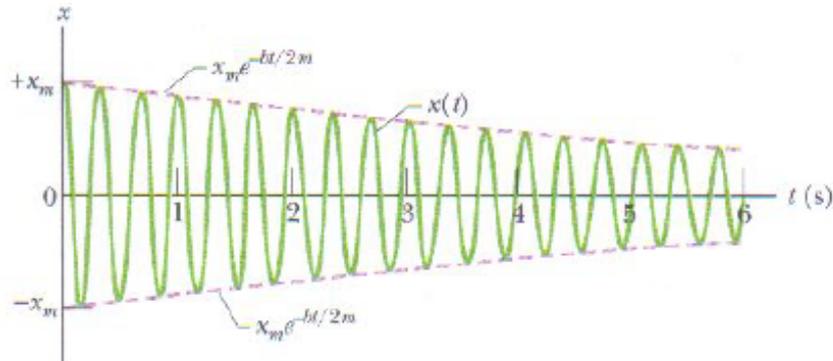
Fonte: (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2009, p. 97)

As equações 3.3 e 3.4 descrevem um movimento perfeito, contínuo, e eterno. Contudo sabe-se que nenhum movimento perpétuo é fisicamente realizável sem adição de energia ao sistema. Logo, se nenhuma excitação for feita ao sistema, ele tende a perder totalmente sua energia até chegar ao ponto de equilíbrio. Esta perda de energia, associada ao movimento harmônico descrito por pêndulos é conhecido por Movimento Harmônico Simples Amortecido.

Esse tipo de movimento tem características de amplitudes de oscilação que diminuem com o passar do tempo. Em teoria de controle, esses tipos de sistema são conhecidos

por sistemas de segunda ordem, com classificação de subamortecidos, onde seu fator de amortecimento é sempre menor que 1 ($\zeta < 1$) E tem a característica oscilatória temporal mostrada na figura 6.

Figura 6 – Resposta Temporal de Sistema Subamortecido



Fonte: (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2009, p. 102)

Dado um determinado fator de amortecimento, a energia mecânica total desse sistema, descrito pela soma da energia cinética e potencial, tende a zero com o passar do tempo. Se não houver excitação, o sistema oscila ao redor do seu ponto de equilíbrio.

Um bom comparativo para esta situação seria deslocar um pêndulo a determinado ângulo e liberá-lo, com o passar do tempo, sua energia mecânica se dissipa devido a fatores construtivos como atrito entre partes móveis e com o ar. Eventualmente, ele voltará para sua posição inicial de repouso, na vertical, voltado para baixo.

Em contrapartida, um pêndulo com controlador para posição tende a oscilar da posição de repouso para a referência e permanecer lá enquanto não houver distúrbios no sistema.

3.1.1 Pêndulos Invertidos

Naturalmente se sabe que, a gravidade leva os pêndulos à posição de equilíbrio voltada para baixo, ou 0° com a vertical. Um pêndulo invertido trata-se de um sistema de controle dinâmico que visa estabilizar a haste do pêndulo simples na vertical, porém voltado para cima.

Pêndulos Invertidos tem as mais diversas aplicações. Uma das mais utilizadas é para o controle de atitude de foguetes e satélites. Controle de atitude consiste no controle da posição de objetos, ou em casos específicos, seus ângulos em relação a determinados referenciais.

Outro método de utilização para pêndulos invertidos que tem crescido bastante é na biomecânica para estudo do comportamento do movimento humano. Muitas vezes este

tipo de movimento tem sido copiado para robôs, ou usado para o projeto de próteses especiais.

Praticamente todos os robôs humanoides (que tem forma de ser humano) utilizam estudos na área de controle de pêndulos invertidos para aplicar os sinais corretos aos seus motores. Enquanto isso, alguns robôs não humanoides se utilizam desta teoria para estabilidade, como é o caso dos produtos da companhia Segway que fabrica transportes baseados em estabilidade de pêndulos invertidos.

Figura 7 – Segway X2 SE



Fonte: (SEGWAY, 2018)

Este tipo de transporte de pessoas nada mais se trata de um controle de posição de pêndulo invertido, onde todo o conjunto transporte-pessoa se torna o pêndulo e a compensação (estabilidade) se dá pelo acionamento dos motores da roda que levam o conjunto para frente ou para trás. Tal movimento, quando realizado corretamente, combinado com a terceira lei de Newton possibilita um movimento retilíneo estável, contínuo e confortável ao operador.

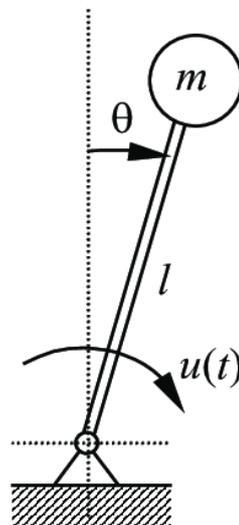
Outras utilizações de controle dinâmico aplicando teoria de pêndulos podem ser encontradas em diversos segmentos da indústria, como no controle de estabilidade de guindastes, estabilização longitudinal de navios e caminhões, dentre muitos outros. (BOBROW, 2015)

“Pêndulos invertidos tem sido bem estudados ao longo dos anos e diferentes métodos de estabilização tem sido implementados.” (BREVİK, 2017, p. 1, tradução do Autor) Dentre os métodos mais difundidos estão o controle PID e realimentação de estados. Muitos outros foram desenvolvidos com base em diferentes teorias de controle, cada um

com sua particularidade, especificações de desempenho, limitações, pontos positivos e negativos. Alguns utilizam controle robusto para anular o efeito de ruídos ou distúrbios, já outros métodos se utilizam de técnicas de controle adaptativo para autoajuste dos parâmetros do controlador conforme a mudança dinâmica dos parâmetros do sistema.

A maioria dos controladores projetados para pêndulos invertidos tem a finalidade de posicionar este num ângulo π rad, ou 180° , com a vertical. Contudo, um controlador pode ser projetado de tal forma que qualquer ângulo num intervalo $[0, 2\pi]$ possa ser alcançado. A figura 8 mostra o modelo simplificado de um pêndulo invertido. De modo geral, um pêndulo nunca está livre de atrito, então um modelo real pode considerar que o pêndulo está conectado a molas e amortecedores, visto que existem certos mecanismos passivos, como rigidez e elasticidade. (SULTAN; MIRZA, 2003)

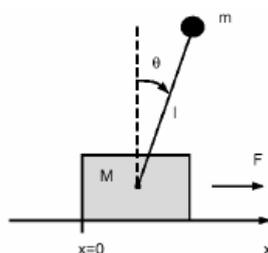
Figura 8 – Pêndulo Invertido



Fonte: (CARRARA, 2012)

É comum, em se tratando de pêndulos invertidos, o estudo do sistema conhecido como *Cart-Pole*, destacado na figura 9. O sistema trata-se de um pêndulo apoiado numa base móvel, que se desloca linearmente em uma direção, e o mecanismo de controle atua na posição do pêndulo.

Figura 9 – *Cart-Pole*



Fonte: (SULTAN; MIRZA, 2003, p. 20)

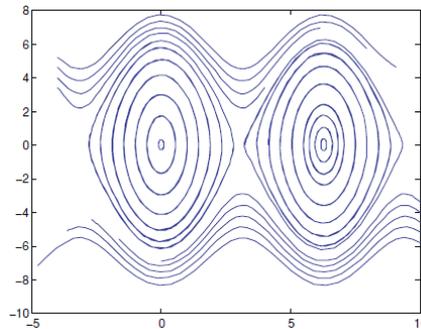
Conforme demonstrado por Florian (2007), as equações dinâmicas que regem o sistema descrito na figura 9 podem ser escritas da seguinte forma, se desconsiderarmos o atrito:

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin(\theta) + \cos(\theta) \left(\frac{-F - m_p l \dot{\theta}^2 \sin(\theta)}{m_c + m_p} \right)}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m_p \cos^2(\theta)}{m_c + m_p} \right)} \quad (3.5)$$

$$\ddot{x} = \frac{F + m_p l (\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - \ddot{\theta} \cos(\theta))}{m_c + m_p} \quad (3.6)$$

Pode-se ver que as equações dinâmicas regem um sistema não-linear. Contudo, dependendo dos parâmetros físicos sob os quais o sistema foi construído, pode-se ter um sistema controlável, ou não. Supondo um sistema controlável, uma possível resposta do sistema pode ser visto na figura 10, que mostra o retrato de fases de um sistema não-linear.

Figura 10 – Retrato de Fase de um sistema não-linear



Fonte: (BLOCK; ÅSTRÖM; SPONG, 2007, p. 11)

“Um retrato de fase nos mostra uma família de trajetórias para diferentes condições iniciais, fornecendo uma visualização do padrão de comportamento do sistema.” (ZUBEN, s.d apud SLOTINE; LI et al., 1991, p. 1). Com o retrato de fase, pode-se prever o comportamento do sistema não-linear. Um retrato de fase de sistema de 2ª ordem é descrito no plano cartesiano e possui uma família de curvas. Um sistema de 1ª ordem também pode ser representado, contudo, em vez de uma família de curvas, será apresentado somente uma curva.

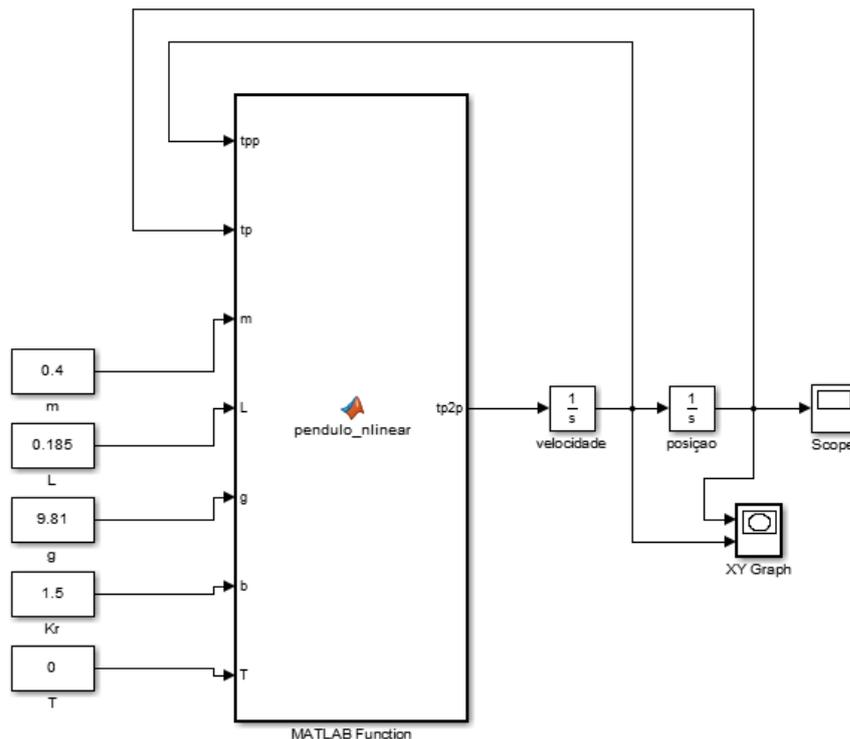
Uma característica peculiar dos sistemas lineares é seu número de pontos de equilíbrio. Um ponto é dito de equilíbrio se, para o sistema iniciado nesse ponto, ele permanece neste ponto. De acordo com o conceito matemático, se não houver perturbações no sistema, o sistema tende a ficar indefinidamente neste ponto. (FERREIRA, 2016 apud BASSANEZI; JR, 1988, p. 6)

Em particular, sistemas lineares possuem apenas um único ponto de equilíbrio. Enquanto sistemas não-lineares podem ter inúmeros. Em exemplo, temos o pêndulo invertido, que possui dois pontos de equilíbrio. O ponto de equilíbrio estável, onde qualquer distúrbio causado no sistema leva a uma resposta temporal que tende ao estado

de equilíbrio, 0° com a vertical, voltado para baixo. Por outro lado, temos o ponto de equilíbrio instável, onde qualquer distúrbio apresentado leva o sistema a se afastar deste ponto a 180° com a vertical, voltado para cima.

Para verificar o citado, temos a seguinte simulação realizada no *software* SIMULINK[®] que descreve o funcionamento de um pêndulo não-linear. A planta simulada foi a descrita na figura 11.

Figura 11 – Simulação de Pêndulo



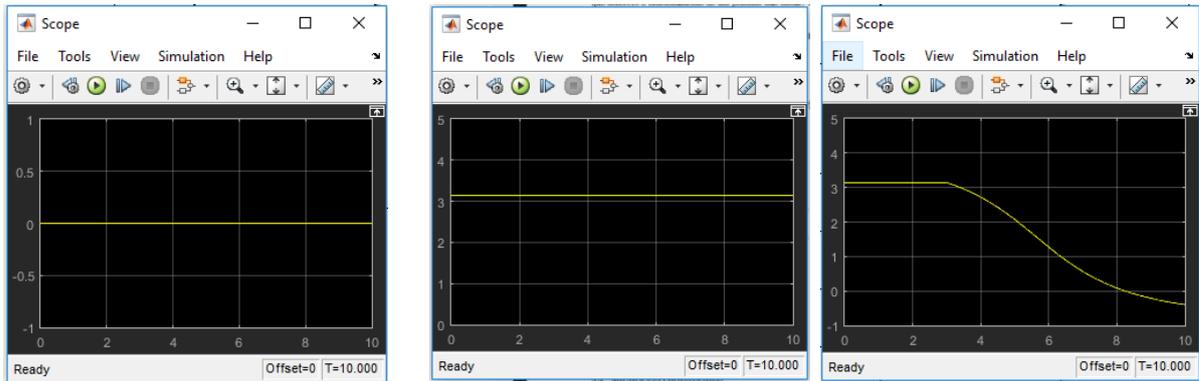
Fonte: Autor

O bloco de função a figura 11 é descrito pela equação 3.7:

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau}{J} - \frac{mgL}{J} \sin\theta - \frac{b}{J} \dot{\theta}, \text{ onde } J = mL^2 \quad (3.7)$$

Simulando para as duas condições iniciais citadas, tomamos o resultado da figura 12. À direita, iniciando com 0° , ao centro iniciando em 180° e à esquerda com um pequeno distúrbio.

Figura 12 – Comportamento de Pêndulo em diferentes situações iniciais



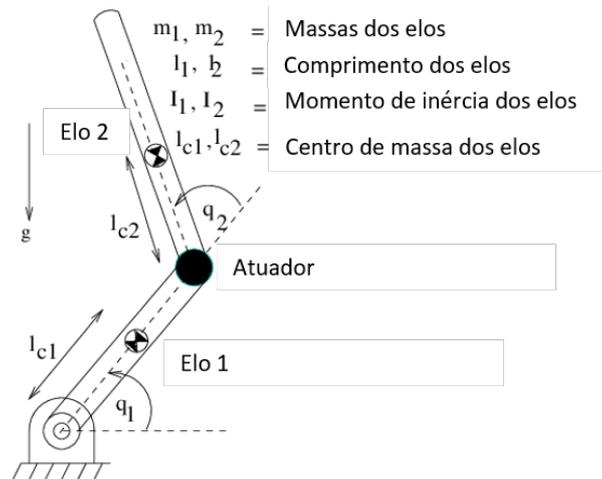
Fonte: Autor

Identifica-se com a simulação que o ponto de equilíbrio instável se encontra no ângulo π . Ao se aplicar um pequeno distúrbio ao pêndulo, que se encontra em π rad, sua tendência é levar o sistema ao ponto 0 rad.

3.1.2 Acrobots

Acrobots (*acrobatic-robots*, robôs acrobatas) assim como os pêndulos com roda de reação, os *pendubots* estão numa extensa lista de sistemas não-lineares sub-atuados, ou seja, o número de graus de liberdade do sistema é menor que seu número de atuadores.

Um *acrobot* consiste num manipulador simples, de duas juntas, que atua no plano vertical. (HAUSER; MURRAY, 1990) Sua estrutura pode ser comparada, como seu nome sugere, a um ginasta quando tenta se equilibrar numa barra. A primeira junta (pivô) seria comparada aos braços do atleta, que promove a sustentação de todo o corpo, enquanto que o movimento da segunda junta, atuada, seria comparada às pernas do ginasta. O diagrama de corpo livre de um *acrobot* pode ser visto na figura 13.

Figura 13 – Diagrama de corpo livre de um *acrobot*

Fonte: (BANAVAR; MAHINDRAKAR, 2003, p. 1, adaptado)

Semelhante à maioria dos sistemas sub-atuados, o *acrobot* tem a possibilidade de controle de seguimento de trajetória e estabilização em torno de um ponto específico. O caso mais documentado é o controle em torno do equilíbrio invertido (π rad). As estratégias de controle aplicados a esse tipo de sistema geralmente incluem aspectos da troca de energia cinética e mecânica para elevar o sistema à sua posição desejada, e de lá o controlar. Dentre as técnicas mais comuns, a utilização do controle tipo *bang-bang* para o levantamento e o uso de transformações lineares para alocar o centro de massa do sistema na direção da primeira junta para o equilíbrio são as mais tratadas.

3.2 RODAS DE REAÇÃO

Rodas de Reação formam uma classe de atuadores elétricos mais usados atualmente em sistemas aeroespaciais. O sistema baseia-se no princípio da conservação do momento angular. “Tal como a conservação do momento linear, esse princípio constitui uma lei geral da conservação, válida em todas as escalas, desde sistemas atômicos e nucleares até o movimento de galáxias.”(YOUNG; FREEDMAN, 2008, p. 334)

Este princípio, assim como o momento linear, quantidade de movimento, quantidade de energia e muitos outros demonstrados por Newton no século XVIII, leva em consideração a soma de todos os momentos e torques atuantes em um sistema para determinar seu equilíbrio e sua conservação. Momento angular, definido por \vec{L} , é uma grandeza física análoga ao momento linear \vec{p} . Por serem grandezas vetoriais, sua direção e sentido são levados em conta durante a resolução de problemas. \vec{L} é diretamente proporcional ao vetor posição \vec{r} , vetor que relaciona a partícula, ou corpo rígido analisado à origem do sistema referencial. Momento angular pode ser relacionado tanto com o momento linear da partícula quanto sua velocidade e momento de inércia, conforme mostra a equação

3.8.

$$\vec{L} = J\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (3.8)$$

Onde \vec{L} é o vetor momento linear, $\vec{\omega}$ é o vetor velocidade angular, J é o momento de inércia da partícula, \vec{r} o vetor posição da partícula, e \vec{p} o vetor momento linear da partícula ou corpo rígido em movimento. Em particular, quando um sistema possui n componentes, o módulo do momento linear total do sistema pode ser descrito pela equação 3.9.

$$L = \sum_{i=1}^n J_i \omega_i \quad (3.9)$$

Quando não há variação no tempo do momento angular, diz-se que este momento se conserva, ou seja, sua derivada no tempo é nula. Tal informação é importante para o controle de rodas de reação, visto que deve-se haver um equilíbrio entre os sistemas controlados. Pode-se analisar isso de acordo com a equação 3.10.

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} = 0 \quad (3.10)$$

Isso nos mostra que L é invariante no tempo, e por isso, constante. Tomando a equação do momento angular total num sistema com n corpos e aplicando somente a dois corpos, se tem:

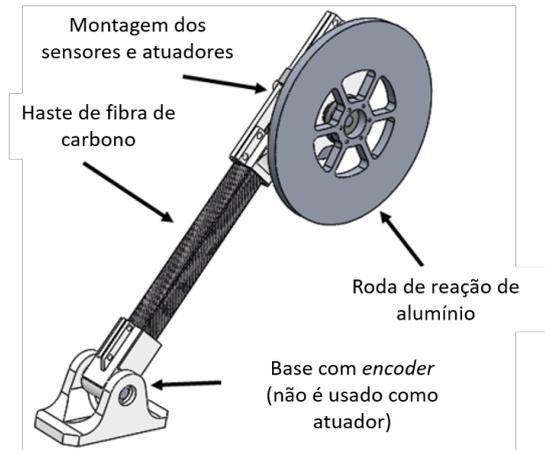
$$L = J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2 \quad (3.11)$$

A equação 3.11 mostra que, sendo L , J_1 e J_2 constantes, a variação de ω_1 implica na variação de ω_2 . Se o sistema tem momento angular constante, ao se aumentar ω_1 , obrigatoriamente, ω_2 diminui. Pode-se relacionar ainda o momento angular ao torque gerado pelo sistema. Em sistemas rotacionais, torque é proporcional ao momento de inércia e a aceleração do sistema. A equação 3.12 demonstra a relação citada, e ainda confirma a conservação de momento do sistema, já que, se a derivada de \vec{L} é igual a 0, logo o somatório de todos os torques presentes também é igual a 0.

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} = J \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \vec{\tau} \quad (3.12)$$

Rodas de reação são tipicamente construídas de um motor elétrico, geralmente um motor sem escovas, um mancal e um elemento de inércia. O elemento de inércia e o motor são montados sobre um mancal que deve garantir a precisa rotação em torno de um eixo. A velocidade de rotação do sistema é controlada por um sistema eletrônico de acionamento do motor. (BOBROW, 2015, p. 7)

Figura 14 – Esquema de um pêndulo com roda de reação



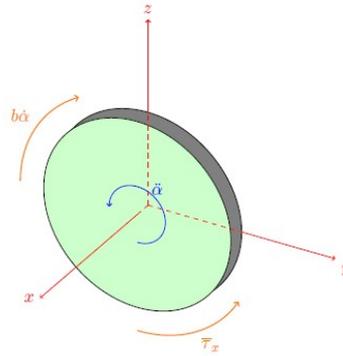
Fonte: (RAMOS, 2017, adaptado)

Por essa forma, um pêndulo acionado por roda de reação, possui a haste, o motor e a roda de reação. Diferente dos demais tipos de pêndulo, este possui atuação na extremidade livre, e não em seu eixo de rotação. Trata-se de um sistema com dois graus de liberdade, sendo um grau a rotação do pêndulo em torno do seu eixo de fixação e o segundo é o movimento de rotação da roda (acoplada ao rotor do motor) sobre o estator do motor, e conseqüentemente, da haste e do pêndulo. Por isso, pode-se considerar um sistema com 2 parcelas de inércias, e a equação 3.13 descreve seu momento angular:

$$L = (J_{haste} + J_{motor})\omega_{haste+motor} + J_{roda}\omega_{roda} \quad (3.13)$$

Como dito anteriormente, agora fica mais claro que a variação de velocidade da roda de reação contribui diretamente para a variação de velocidade do pêndulo. A figura 15 mostra como é a relação de torques em uma roda de reação. São mostrados o torque gerado pela aceleração do rotor, e o torque devido ao atrito viscoso. O torque gerado é no mesmo sentido da aceleração, como demonstrado na terceira lei de Newton, aplicada a sistemas rotacionais. Na figura 15, α representa o ângulo da roda com a vertical e, portanto, $\ddot{\alpha}$ sua aceleração angular.

Figura 15 – Torques Atuantes em uma Roda de Reação

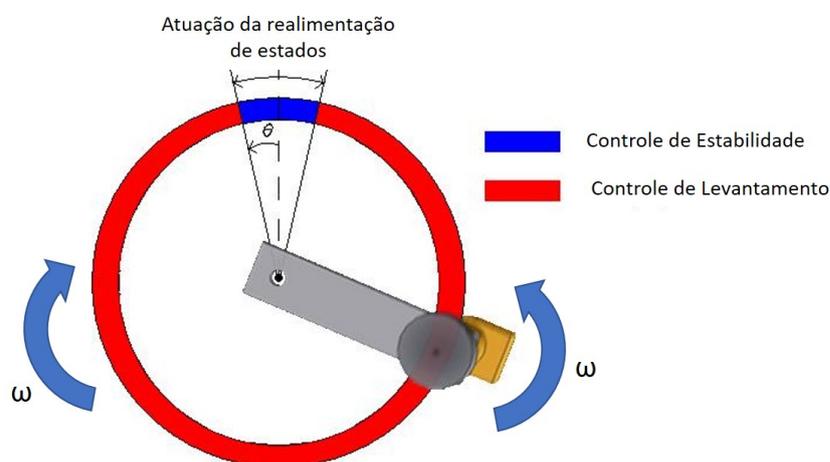


Fonte: (BOBROW, 2015, p. 21)

Existem, basicamente, duas maneiras de se elevar um pêndulo com roda de reação. A primeira apenas acionando-se o motor. Esta técnica está relacionada diretamente ao torque desenvolvido pelo motor, se for forte o suficiente, em comparação aos parâmetros do sistema, o pêndulo irá se mover assim que o motor entrar em funcionamento. Nesse tipo de levantamento, pode-se elevar a tensão do motor para que ele alcance a posição desejada rapidamente e quando chegar a este ponto aplicar técnicas de controle em torno deste ponto de operação. Um problema disso é que, geralmente, o pêndulo chega numa velocidade muito alta no ponto referência, o que dificulta seu controle. (CHAUVEAU et al., 2005)

Outra técnica para levantamento de pêndulos é conhecida por controle de energia. Controle de energia não significa gastar menos energia para se chegar ao topo, mas sim que há um controle da troca de energias cinética e potencial para otimizar o processo e fazer com que o pêndulo chegue com uma velocidade baixa ao ponto desejado, no caso π rad. A figura 16 nos mostra os dois estados possíveis num pêndulo.

Figura 16 – Áreas de Controle de Energia do Pêndulo

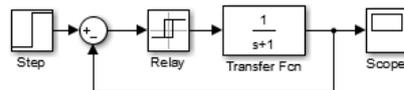


Fonte: (CHAUVEAU et al., 2005, p. 11, adaptado)

Na área vermelha da figura 16, tem-se a área de controle de energia, onde há a constante troca de energia cinética e potencial. Já a área azul se refere à vizinhança do ponto de operação escolhido. Geralmente para estes pontos de operação, pode-se linearizar o sistema em torno deste ponto, o que facilita o controle local. No fim do projeto do controlador, tem-se dois tipos de controle, um para elevar o pêndulo à região de operação, e outro para estabilizar o sistema.

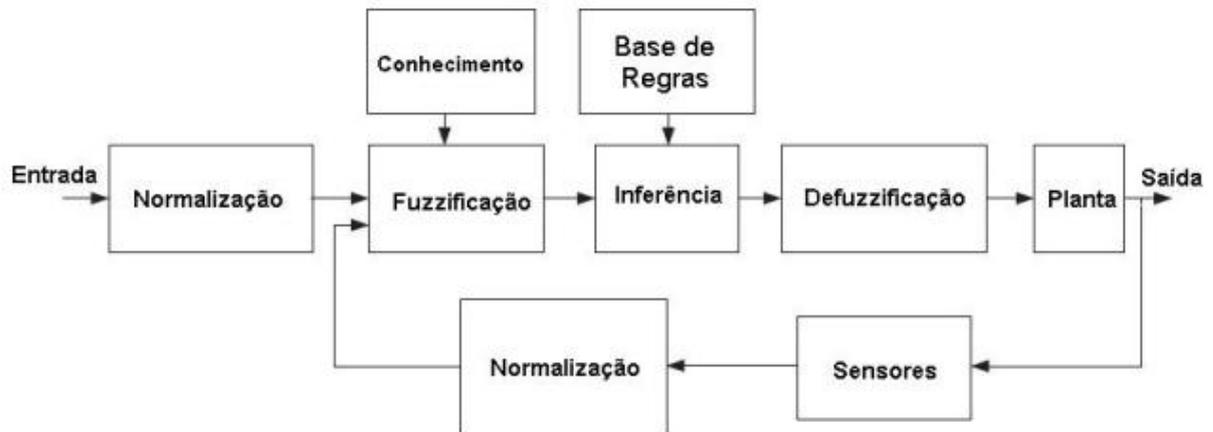
Diversas técnicas podem ser usadas para o levantamento do pêndulo, a maioria levando em consideração a velocidade do sistema, e por consequência, sua energia cinética. É possível utilizar um controlador *Bang-Bang*, controle por lógica *Fuzzy*, assim como outras técnicas de controle moderno. O controle tipo *Bang-Bang* atua como se fosse um relé, acionando o sistema quando o sinal de realimentação é menor que a referência, e desligando quando maior. (MOORE, 2014) A figura 17 mostra um diagrama de blocos de uma aplicação básica desse tipo de controlador.

Figura 17 – Aplicação Básica de controlador *Bang-Bang*



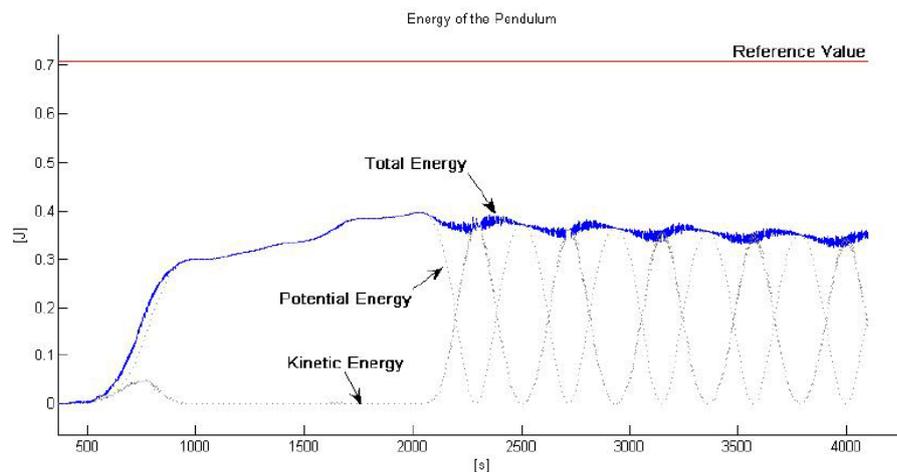
Fonte: Autor

Outro controlador que pode ser usado, é o controlador por lógica *Fuzzy*. “Modelagem e controle *Fuzzy* de sistemas são técnicas para o tratamento de informações qualitativas de uma forma rigorosa.”(GOMIDE; GUDWIN, 1994) De modo geral, controle *Fuzzy* é utilizado para tomada de decisão de acordo com as suas entradas. Para controle adequado de energia, busca-se utilizar dados coletados de duas grandezas, a posição e velocidade do pêndulo. A partir daí, se pode definir as regras do controladores e quais serão as tomadas de decisão aplicadas. É conveniente utilizar controle de energia para elevar pêndulos. “O comportamento obtido com essa estratégia [controle de energia] depende, criticamente, de um único parâmetro, a aceleração disponível”(FURATA, 1996, p. 42, Tradução do Autor) A figura 18 mostra um exemplo de controlador por lógica *Fuzzy*. A figura 19 demonstra o comportamento temporal da energia de um pêndulo durante o processo de levantamento. E, finalmente, a figura 20 mostra uma roda de reação física.

Figura 18 – Exemplo de Controlador *Fuzzy*

Fonte: (CORONEL, 2010)

Figura 19 – Energia total de pêndulo durante o levantamento



Fonte: (CHAUVEAU et al., 2005, p. 12)

O conceito por trás de rodas de reação, a conservação do momento angular, está presente em diversas áreas, contudo sua utilização comercial mais importante é em objetos que orbitam o planeta Terra. Rodas de reação são grandes aliadas para controle de atitude e estabilização de satélites, foguetes após saírem da atmosfera terrestre. Por possuírem grande inércia, as rodas acopladas a esses objetos espaciais conseguem uma estabilidade muito boa com baixo consumo de potência. (JEPSEN et al., 2009)

Figura 20 – Roda de Reação utilizada em satélite espacial



Fonte: (NASA, 1997)

Rodas de Reação só podem ser utilizadas para controles de atitude, ou seja, apenas controle de rotação. O que significa que não é possível movimentar um objeto linearmente no espaço de trabalho utilizando rodas de reação. Em satélites e objetos espaciais, o sistema de controle de atitude conta, geralmente, com um invólucro contendo quatro rodas de reação. Três perpendiculares entre si para possibilitar o movimento nos três eixos coordenados e uma que não é perpendicular a nenhuma outra, para segurança e que faz parte do sistema de redundância, no caso de alguma das três primeiras rodas apresentar falhas.

3.3 ESPAÇO DE ESTADO

Com a evolução da tecnologia, cresce a complexidade dos problemas a serem resolvidos. Sistemas mais complexos, que envolvem múltiplas entradas e saídas não podem mais ser tratados como simples funções de transferência. Para se analisar corretamente um sistema com múltiplas entradas e saídas, *MIMO*, é necessária uma representação relativamente simples, que mostre toda a complexidade do sistema tratado com o mínimo de perda de informações possíveis. (OGATA, 2003)

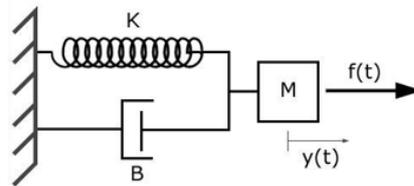
É comum o estudo de sistemas de controle através da função de transferência que relaciona entrada e saída de determinado sistema. As técnicas aprendidas com funções de transferências são conhecidas como controle clássico e nos ajudam bastante a entender o conceito por trás de sistemas físicos. Infelizmente, a teoria de controle clássico não pode ser aplicada em todos os sistemas físicos existentes, pois há a limitação de notação. Numa função de transferência só pode haver uma única entrada e uma única saída, sistemas conhecidos por *SISO*.

Nesse âmbito surgiu a notação de representação por espaço de estados. É uma notação que representa um sistema físico multivariável por n equações diferenciais de primeira ordem numa descrição vetorial-matricial. Todos os sistemas dinâmicos existentes são expressos e descritos por meio de equações diferenciais que exprimem as leis físicas que regem seu comportamento, representado no domínio do tempo. (MAYA; LEONARDI,

2011) A partir desse modelo físico, outras notações podem ser criadas, como a função de transferência e o espaço de estados.

Pode-se tomar como exemplo o sistema massa-mola-amortecedor. Sistema clássico de estudo no controle. A figura 21 mostra a lei de controle (sistema físico no domínio do tempo) que rege o sistema, bem como sua função de transferência e sua representação no espaço de estados.

Figura 21 – Diferentes Representações de Sistema Dinâmico



$$(Lei\ de\ Controle) \quad M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = f(t)$$

$$(Função\ de\ Transferência) \quad \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$$

$$(Espaço\ de\ Estados) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & -B/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f \quad [y] = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]f$$

Fonte: Autor

O espaço de estados pode ser definido como sendo um espaço vetorial-matricial de ordem n no qual cada eixo representa um estado do sistema. E cada estado representa um conjunto de informações do vetor de estados num instante de tempo t . (MAYA; LEONARDI, 2011). Logo, em qualquer instante de tempo t , é possível acessar os estados de um sistema e esse conjunto de informações descreve o comportamento completo do sistema analisado nesse instante.

Os estados podem ser escolhidos de forma a facilitar a análise do sistema, definindo entrada e saída de acordo com a necessidade do problema. Cada estado possui uma única equação diferencial de primeira ordem que relaciona todas as entradas e saídas do sistema. Num sistema, um estado é descrito pela equação diferencial em termos das entradas e saídas. Se as entradas, saídas e variáveis de estado são lineares, então o sistema será linear e o estado pode ser descrito como combinação linear das variáveis de entrada e saída. As equações de estado e de saída podem ser definidas de acordo com as equações 3.14 e 3.15:

$$\text{Para sistemas lineares} \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\text{Para sistemas não-lineares } \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases} \quad (3.15)$$

A matriz A é particularmente interessante por sua relação com a função de transferência do sistema. Os autovalores da matriz $A_{n \times n}$, onde n é o número de equações diferenciais de estado do sistema, são as raízes da equação característica da função de transferência do mesmo sistema. Como exemplo, considera-se a matriz A do caso do sistema massa-mola-amortecedor. Os auto-valores são calculados:

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (3.16)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{K}{M} & \lambda + \frac{B}{M} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.17)$$

$$\lambda^2 + \frac{B}{M}\lambda + \frac{K}{M} = 0 \quad (3.18)$$

Verifica-se que a equação final é a mesma equação característica descrita na função de transferência do sistema mecânico apresentado. Ainda é possível relacionar as quatro matrizes A, B, C e D com a função de transferência através das formas canônicas. As formas canônicas tem bastante importância para a notação de espaço de estado para facilitar a análise de controlabilidade, observabilidade e estabilidade do sistema. As formas canônicas são quatro, e cada uma é utilizada de forma distinta na análise para projeto de controladores. São elas:

- Forma Canônica Controlável
- Forma Canônica Observável
- Forma Canônica Diagonal
- Forma Canônica de Jordan

Como o próprio nome sugere, a forma canônica controlável faz parte da análise de controlabilidade do sistema, a forma canônica observável, da observabilidade do sistema. A forma canônica diagonal relaciona a matriz A com as raízes diretas do polinômio característico da função de transferência do sistema. A matriz A é formada pelas raízes desse polinômio na sua diagonal principal e os demais termos da matriz são nulos. Já a forma canônica de Jordan é semelhante à anterior, com uma pequena diferença. A forma canônica diagonal não aceita raízes iguais, quando isso ocorre, deve-se representar o sistema pela forma canônica de Jordan, que tem praticamente a mesma construção, com algumas pequenas mudanças. (OGATA, 2003)

3.3.1 Controlabilidade e Observabilidade

Um sistema pode ser dito controlável se existir uma lei de controle, sem restrições, que transfira qualquer estado inicial $x(0)$ para qualquer outra localização desejada $x(t)$. (DORF; BISHOP, 2001). Isso significa que apenas com uma lei de controle, pode-se fazer com que o sistema atinja a referência desejada. A controlabilidade de um sistema nos diz se é possível alocar os polos da maneira desejada para conseguir as especificações atribuídas em projeto.

“Observabilidade se refere a capacidade de se estimar os estados de um sistema a partir de sua saída.”(DORF; BISHOP, 2001, p. 499) Desta forma, diz-se que um sistema é observável se sua saída tem seu sinal composto por cada estado de entrada, ou seja, cada variável de estado contribui como uma componente do sinal de saída.

3.3.2 Realimentação de Estados

Nos modelos descritos por funções de transferência, ou seja, entrada e saída, o controle do sistema é feito através da realimentação do sinal de saída. No modelo do espaço de estados, também é possível a realimentação de estados, que proporciona a modificação da dinâmica do sistema de forma bem mais efetiva.(MAYA; LEONARDI, 2011)

De forma teórica, é possível alocar o polos do sistema em qualquer posição, garantindo qualquer comportamento (tempo de subida, sobressinal, tempo de acomodação), desde que o sistema seja completamente controlável e observável. Contudo, a implementação de controladores práticos tem sua limitação no aspecto físico do sistema. Por exemplo, num circuito aumentador de tensão, o aumento de tensão em teoria é infinito, porém limitado às questões físicas dos componentes utilizados. Tensões maiores que as recomendadas pelo fabricante podem danificar os componentes e o próprio circuito.

Kalman et al. (1960), deu grande contribuição para a teoria de controle moderno aplicada a realimentação de espaço de estados. De fato, seus teoremas são utilizados para determinar a controlabilidade e observabilidade de sistemas, e por sua matriz de realimentação, é possível alocar os polos dinâmicos do sistema e assim, controlá-lo de forma satisfatória.

3.4 MICROCONTROLADORES

Um microcontrolador, em sua essência é um computador compactado em um único *chip* (PENIDO; TRINDADE, 2013). Para tal, conta com todos os elementos necessários ao seu processamento, como:

- ULA - Unidade Lógica e Aritmética

- Memória
- Processador
- Periféricos
- Temporizadores
- Outros

De forma simplificada, o conceito de microcontroladores surgiu da evolução dos circuitos digitais, sendo tanto combinacionais quanto sequenciais, devido a necessidade de suas aplicações e da complexidade que um circuito digital “discreto”, ou seja, montado componente a componente, ocasionaria.

Nesse âmbito, o surgimento dos microcontroladores possibilitou um novo horizonte de possibilidades nas mais diversas áreas, mas principalmente a automação. Tarefas que antes seriam realizadas utilizando inúmeros circuitos, elétricos ou eletrônicos, hoje podem ser resumidos a simples atuadores e um único microcontrolador.

Comercialmente existem diversos tipos de microcontroladores, que satisfazem todos os gostos e necessidades técnicas. Desde aplicações industriais à domótica, uma das plataformas de prototipagem mais utilizados atualmente é o Arduino.

3.4.1 Arduino

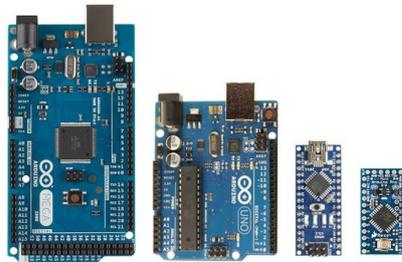
“O Arduino é uma plataforma eletrônica de código aberto baseada em *hardware* e *software* fáceis de usar.”(ARDUINO, 2018, Tradução do autor). Placas de circuito impresso, com entradas e saídas analógicas e digitais formam os produtos tipo Arduino. Dentre os diversos modelos, cada um com suas especificações técnicas e particularidades, destacam-se 3 tipos de placas: Arduino Mega, Arduino Uno e Arduino Nano. Sua principal diferença se dá na capacidade de processamento e na quantidade de entradas e saídas disponíveis. Enquanto que o modelo Nano possui apenas 14 pinos digitais e 8 analógicos; o modelo Uno conta com especificações semelhantes ao Nano, diferenciando-se apenas o tamanho da placa; já o modelo Mega, conhecido pelo nome do seu processador AT Mega 2560, possui 16 pinos analógicos e 54 pinos digitais. Uma comparação entre as placas pode ser vista na figura 22. Na imagem também temos o modelo Arduino Pro-Mini, que foi descontinuado.

Com a disseminação da automação, as placas Arduino vem tendo grande espaço dentre os entusiastas, estudantes, empresas de automação residencial e até indústrias. As placas tem uma facilidade de ligação que garante que mesmo as pessoas menos experientes em automação consigam realizar suas atividades, e ainda conta com uma gama de inúmeros sensores e atuadores desenvolvidos especialmente para se comunicarem com as placas Arduino.

Outro ponto a ser ressaltado é a segurança das placas, que trabalham com 5V ou 3.3V em corrente contínua. Além disso, pode-se trabalhar com conversão analógica-digital, digital-analógica, pulsos PWM, que podem atuar no controle de relés, LEDs, controle de atuadores, além de possibilitar a aquisição de dados com diversos sensores.

Arduino possui sua própria IDE que é disponibilizada gratuitamente para *download*. Com programação numa linguagem muito semelhante a C, traz facilidade de entendimento para os que não conhecem o mundo da programação. Os 3 modelos de placas citadas possuem comunicação serial via cabo USB, que serve tanto para carregar o programa escrito na placa, como para devolver informações coletadas ao usuário. E combinado a outros programas, como o SIMULINK[®], o Arduino se torna uma ferramenta poderosa no controle e automação.

Figura 22 – Arduinos Mega, Uno, Nano, Pro-Mini (da esquerda para direita)



Fonte: (INN, 2018)

3.5 SIMULINK[®]

O Simulink[®] é um programa interativo baseado em gráficos que permite resolver problemas criando modelos usando um conjunto de “blocos internos”. (MOORE, 2014). Este *software* faz parte do pacote MATLAB[®] e necessita dele para ser utilizado. Sua principal aplicação é em torno de simulações, e para isso conta com diversas *toolboxes* que contém blocos específicos para várias aplicações.

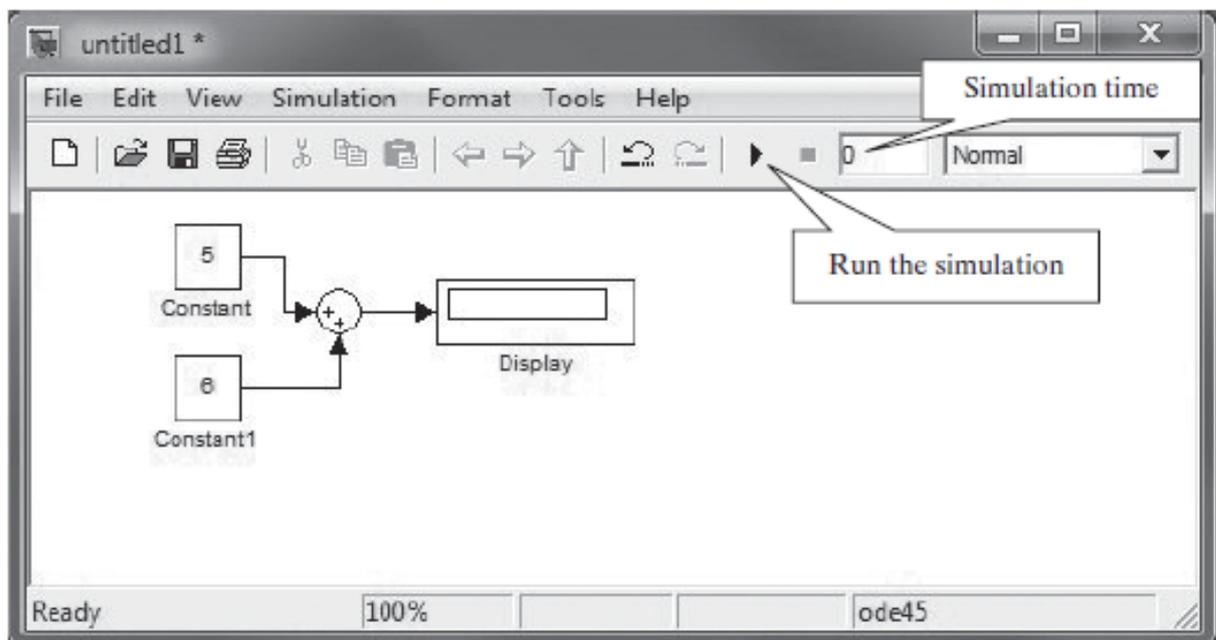
Relacionado a sistemas de controle, o programa conta com variados tipos de blocos para todos os ramos de controle, desde funções de transferência, blocos de modelos de espaços de estados até controladores como PID, *Fuzzy* e muitos outros. Além disso, o programa conta com a possibilidade de integração com o mundo físico através das portas USB do computador.

Temos *toolboxes* disponíveis para blocos de uso aeroespacial, blocos para controle por processamento digital de imagem, telecomunicações, sistemas mecânicos, sistemas dinâmicos em geral e aplicações matemáticas envolvendo transformadas de Laplace, Fourier e Z, discretização no tempo e outras mais.

Em especial, como *toolbox* adicional, tem-se o suporte a diversos tipos de *hardware* e um destes é o Arduino. Através desta comunicação, é possível realizar o controle de vários sinais de entrada ao mesmo tempo e ainda controlar as saídas digitais, analógicas e PWM do Arduino, além da possibilidade de interligação para *shields* de internet e rádio-frequência.

Arelado a isso, o sistema conta com todas as aplicações do pacote de controle do MATLAB[®], isso significa que pode-se traçar gráficos de lugar das raízes, verificar diagramas de resposta temporal e em frequência, analisar diagramas de fase, calcular diretamente realimentações e alguns ganhos, realizar o ajuste de controladores e verificar sua resposta em tempo real. A imagem 23 retrata a interface inicial da janela de simulações do *software*.

Figura 23 – Interface do *software* Simulink[®]



Fonte: (MOORE, 2014, p.608)

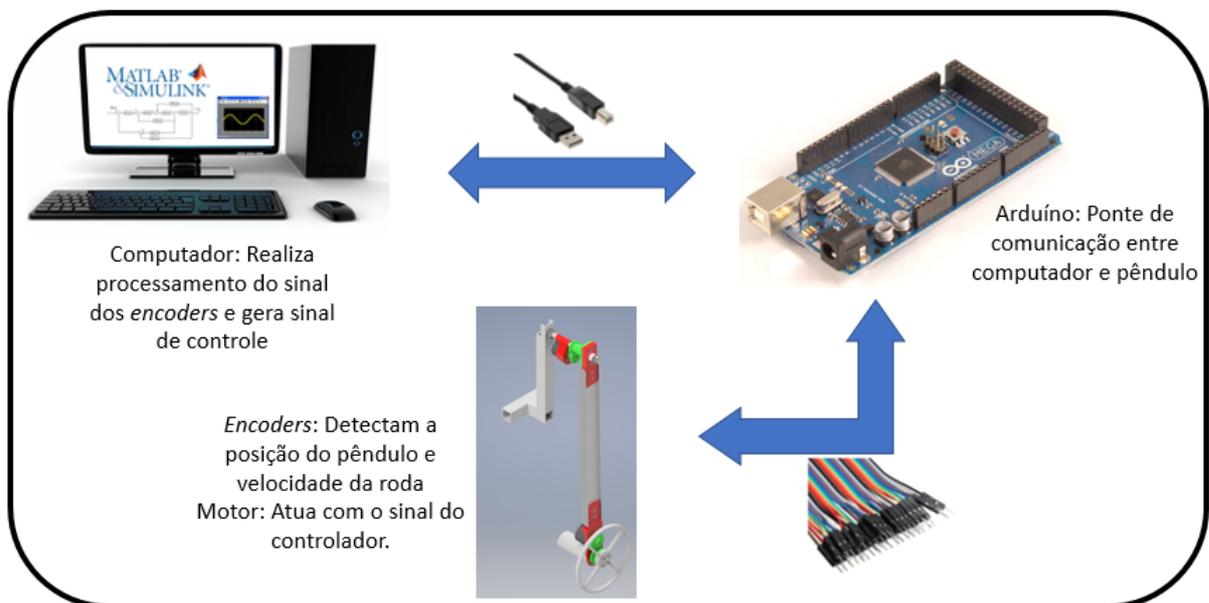
4 METODOLOGIA

Neste capítulo são descritos os materiais utilizados para realizar a pesquisa e seu critério de escolha, bem como os métodos empregados para o desenvolvimento e análise de resultados obtidos pela mesma.

4.1 ARQUITETURA DO SISTEMA PROPOSTO

Basicamente, a arquitetura do sistema é dividida em 3 grandes grupos: O *software* de controle, a interface de comunicação e pêndulo. A interface de comunicação, representada pelo Arduino, será responsável por traduzir os sinais adquiridos de ambos os *encoders* presentes no pêndulo para um sinal serial, que pode ser lido com facilidade no computador. O computador, utilizando o *software* Simulink[®], irá gerar um sinal de controle, que será retransmitido ao Arduino, que por sua vez o encaminhará ao motor presente no pêndulo. A arquitetura do sistema pode ser descrita na figura 24.

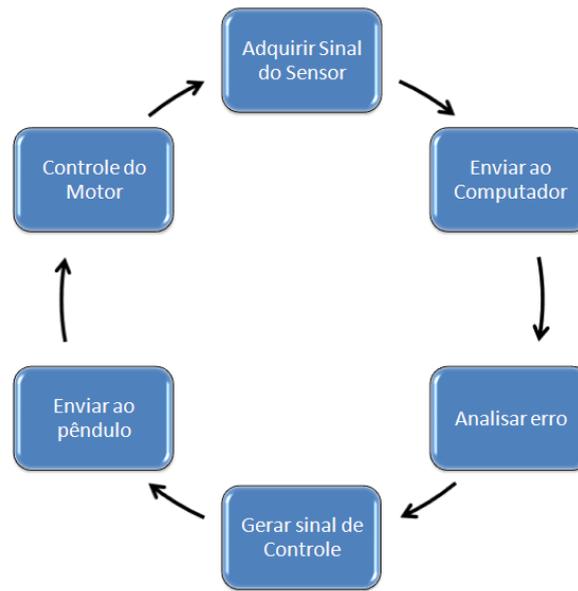
Figura 24 – Arquitetura do Sistema



Fonte: Autor

Analisando somente o fluxo que os sinais irão percorrer, pode-se gerar um ciclo, que é demonstrado na figura 25.

Figura 25 – Ciclo do Sinal de Controle



Fonte: Autor

4.2 MÉTODOS APLICADOS

Inicialmente, foram realizadas diversas pesquisas sobre as tecnologias que seria utilizadas neste trabalho. Foram estudados: Microcontroladores, *Softwares* de Modelagem 3D, *Softwares* de simulação de modelos, aplicações de pêndulos e de rodas de reação, modelagem matemática, eletrônica, transmissão e tratamento de dados, entre outros.

Após reunidos artigos, dissertações, livros e teses sobre os assuntos abordados, deu-se início a modelagem matemática através das equações de Euler-Lagrange, que relacionam a força com energia em sistemas dinâmicos.

Em paralelo a isso, foi iniciado o projeto do protótipo do pêndulo. O objetivo era projetar um controlador a partir de parâmetros físicos já estabelecidos. Desta forma, o projeto do pêndulo se deu de forma rápida, considerando apenas a robustez estrutural e facilidade de fabricação, impressão e montagem.

A arquitetura do sistema foi definida ainda durante o estudo das referências bibliográficas, e também influenciou no projeto final do protótipo. Durante o projeto do pêndulo foi necessário já escolher quais materiais seriam utilizados, e a partir daí definir a posição dos furos e fixações.

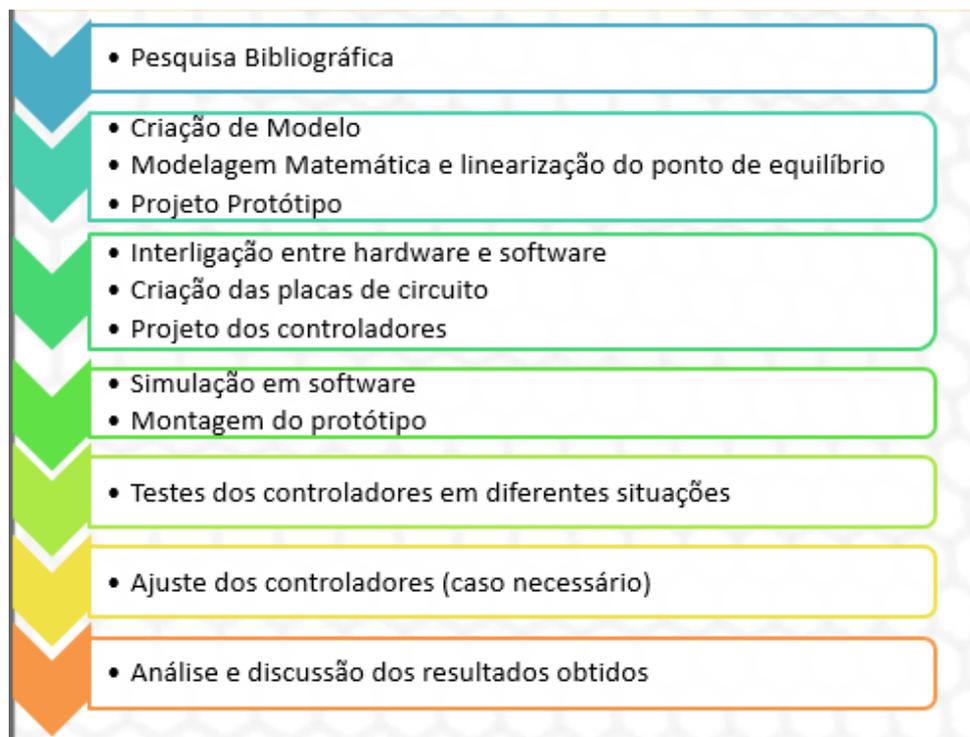
Os *enconders* e motor foram escolhidos com base em pesquisas anteriores realizadas com materiais semelhantes e obtiveram bons resultados. Finalizado o projeto do protótipo, havia a necessidade de sua fabricação e compra nos materiais. Após a finalização da impressão e reunidos todos os materiais necessários, ocorreu a montagem do protótipo sem nenhuma interferência, visto que não havia restrições de tamanho nem material físico.

Durante a montagem final do protótipo, foi finalizada a modelagem matemática e linearização da planta e dessa forma, se deu início o projeto de ambos os controles: de levantamento e de estabilidade. Em paralelo, foi sendo testada a comunicação entre o *hardware* disponível e os *softwares* que seriam utilizados. Nesta etapa, foi definida a necessidade do projeto de uma placa de circuito eletrônica para captação dos dados dos *encoders*.

Por utilizar apenas resistores e Borne tipo KRE, o projeto correu de forma bem rápida, assim como sua fabricação. Finalizada a placa de circuito, pôde-se dar prioridade para a finalização dos controladores. Utilizando os conceitos de estabilidades propostos por Lyapunov para o controle de levantamento, Kalman e Ackermann para o controle de estabilidade, foi possível concluir ambos os controladores.

Em seguida, foi necessário validar se a modelagem e controle estavam de acordo com a dinâmica do sistema físico. Validado este passo, bastava aplicar todo o projeto em duas situações: Simulação e Protótipo. Foram testadas diversas situações em cada caso, tanto em malha aberta, como em malha fechada, com e sem ruído. Por fim, os resultados obtidos foram analisados e discutidos de acordo com os parâmetros definidos em projeto como sobressinal, tempo de assentamento e foram dadas algumas sugestões para trabalhos futuros embasados neste. A figura 26 mostra, de forma resumida, os passos que foram seguidos.

Figura 26 – Metodologia Utilizada



Fonte: Autor

4.3 MATERIAIS UTILIZADOS

4.3.1 *Softwares* utilizados

Todo o comando de controle deste trabalho foi realizado utilizando o programa MATLAB[®] R2015a versão 8.5.0.197613. E as simulações, plantas de controle e comunicação com o Arduino foram feitas utilizando o programa Simulink[®] versão 8.5 (R2015a).

Toda a modelagem 3D do protótipo foi realizada no programa Autodesk[®] Inventor[®] Professional 2016 e 2017. A criação dos esquemáticos das placas de circuito foi feita com o auxílio do *software* Proteus 8.1 Professional SPD1.

4.3.2 *Hardware* e componentes utilizados

a) Arduino

Foi utilizado a plataforma Arduino MEGA 2560, apesar de não ser necessária a utilização de toda sua capacidade de processamento, nem da totalidade de suas portas disponíveis. Foram realizados testes com 3 tipos diferentes de plataformas: Arduino MEGA, Arduino NANO e Arduino UNO. Inicialmente, a ideia seria utilizar o modelo Arduino NANO, pelo seu tamanho reduzido, contudo, notou-se que o mesmo não respondia aos comandos provenientes do *software* Simulink[®] de maneira adequada. Ambos, NANO e UNO, apresentaram as mesmas dificuldades, MEGA foi o único que atendeu aos comandos analógicos e digitais mandados pelo programa.

Figura 27 – Arduino Mega



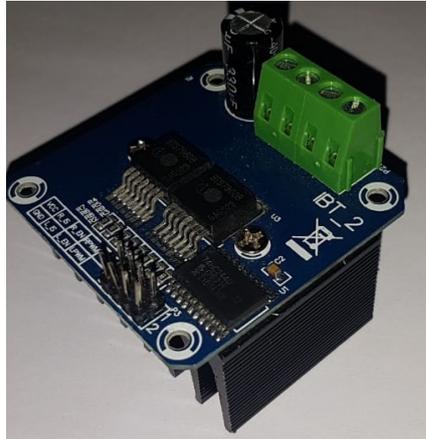
Fonte: (MANTECH ELECTRONICS, 2018, p. 4)

b) *Driver* Ponte H BTS7960

Para comando do motor elétrico é necessário que seu número de revoluções e seu sentido seja controlado de forma correta. Para isso, foi utilizada o *driver* para motores BTS7960. A grande vantagem deste sistema é a possibilidade de trabalho com altas correntes de pico, até 60A, em decorrência do motor escolhido. Por ser formado por circuitos integrados transistorizados, o *driver* pode ser facilmente

controlado através de pulsos PWM provenientes do microcontrolador, além de ter a possibilidade de alimentação externa para tensões de 5.5V a 27.5V.(INFINEON TECHNOLOGIES, 2004)

Figura 28 – *Driver* BTS7960



Fonte: Autor

c) Motor Elétrico

Optou-se pela utilização do um motor elétrico de corrente contínua do modelo AK555/11.1PF12R83CE por seu alto torque e rápida resposta, além disso o motor conta com uma caixa de redução acoplada que diminui sua rotação máxima a 83 rpm. O motor trabalha na faixa de tensão de 6 a 24 V em corrente contínua, e será alimentado em sua tensão nominal, 12V, por uma fonte independente que pode gerar até 10A em 30V de corrente contínua. A figura 29 mostra o motor utilizado e a tabela 1 mostra seus principais aspectos técnicos.

Figura 29 – Motor DC AK555



Fonte: (NEOYAMA, 2017, p. 1)

Tabela 1 – Especificações Técnicas do Motor AK555

Tensão de Operação	6V a 24V
Tensão Nominal	12V
Rotação sem Carga	83rpm
Corrente de Operação (sem carga)	430mA
Rotação em máximo rendimento	65,4rpm
Corrente de operação (máximo rendimento)	1,6A
Torque em máximo rendimento	11,1kgf.cm
Potência em máximo rendimento	5W
Corrente de Partida	6A
Torque de Partida	53kgf.cm

Fonte: (NEOYAMA, 2017, p. 1)

d) *Encoder*

Serão utilizados dois *encoders* incrementais rotativos com 400 pulsos por revolução de modelo LPD3806-400BM-G5-24C. Este modelo foi escolhido por ser de fácil acesso e possuir 2 fases, ou seja, pode-se verificar qual o sentido de rotação que está sendo lido. O primeiro *encoder* será acoplado, por meio de engrenagens com relação 1:1, ao pêndulo, para medição de sua posição. Já o segundo *encoder* será acoplado, também por meio de engrenagens com relação 1:1, ao motor para determinação da velocidade da roda de reação. O modelo escolhido é tipo NPN e opera entre 5V e 24V.

Figura 30 – Encoder PD3806-400BM-G5-24C



Fonte: (RICHEN TECHNOLOGY, 2017, p. 1)

4.3.3 Transmissão de Dados

Toda a transmissão de dados do sistema será feita através de cabos, o motivo dessa escolha deve-se ao fato de que, a transmissão de dados sem fio pode trazer uma latência

à aquisição de dados, e por consequência no sinal de controle. Esta latência, ou atraso no sinal, pode contribuir para que o sinal de controle seja aplicado numa situação diferente da que foi calculado, gerando erros no controle do pêndulo. Além disso, seria necessária a aquisição de *hardware* adicional para possibilitar a transmissão sem fio.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1 PROJETO DO PÊNDULO

Foi idealizado um mecanismo que fosse de fácil construção. Em vista disso, foi modelado o protótipo de acordo com a figura 31.

Figura 31 – Modelo 3D do Protótipo



Fonte: Autor

A sustentação ocorre por meio de um arranjo soldado em perfil quadrado de Metalon, 25x25mm com 2mm de parede. Na haste foi utilizado um perfil H de alumínio para redução de peso. O eixo de rotação se fez utilizando um parafuso M10 de 210mm de comprimento. Tanto os acoplamentos, quanto engrenagens e a própria roda de reação foram impressos em 3D em plástico PLA (*PoliLactic Acid*, Ácido Poliláctico). No acoplamento entre a haste e o eixo de rotação, inseriu-se um rolamento axial de esferas para minimizar o efeito do atrito.

A escolha das dimensões do protótipo foi visando a facilidade de fabricação, impressão 3D e montagem. A roda de reação é um disco medindo 150mm de diâmetro com espessura de 8mm. A figura 32 mostra o resultado final das peças impressas em PLA e a figura 33 mostra o protótipo completamente fabricado e montado. Os desenhos técnicos das peças projetadas podem ser vistos no Apêndice A.

Figura 32 – Peças impressas em 3D



Fonte: Autor

Figura 33 – Protótipo finalizado

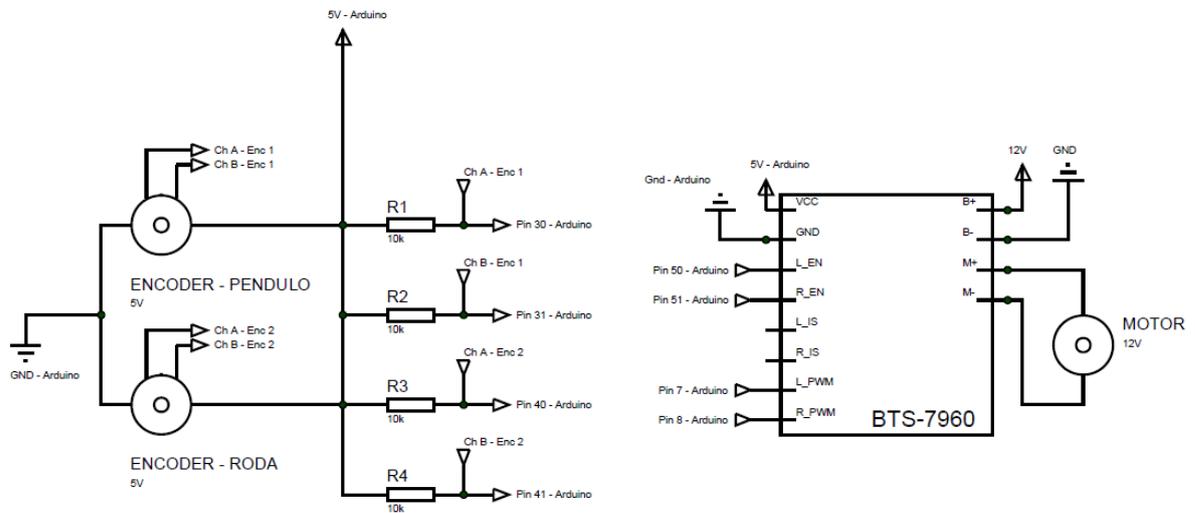


Fonte: Autor

5.2 PROJETO DA PLACA DE CONTROLE DO PÊNDULO

Foi idealizado um circuito eletrônico que permita a utilização do Arduino, o *driver* do motor e o circuito de aquisição de dados dos *encoders* numa única placa. O esquemático é mostrado na figura 34. O circuito foi confeccionado sendo soldado numa placa de fenolite perfurada. Por serem *encoders* tipo NPN, foi necessária a inserção de resistores tipo PULL-UP de 10 K Ω .

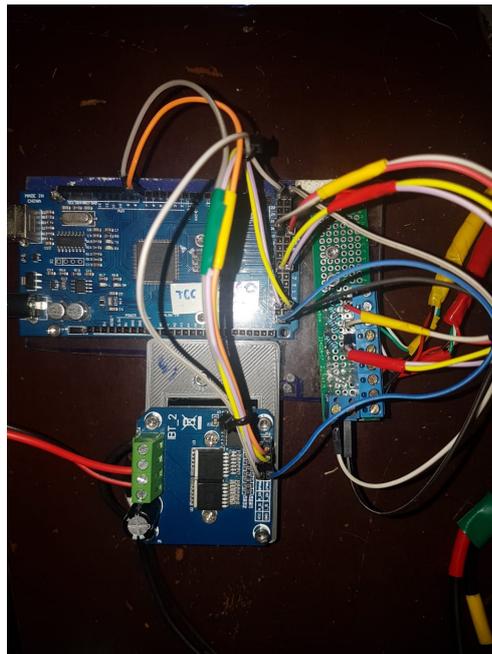
Figura 34 – Esquemático da placa produzida



Fonte: Autor

Para a transmissão de dados entre o o Arduino e os *encoders*, foram utilizados os cabos próprios dos *encoders*, de 1mm de diâmetro. E os cabos de alimentação do motor utilizados foram de 1.5 mm², para suportar a corrente drenada pelo motor da fonte de alimentação. Após a construção e soldagem dos circuitos, o resultado final das placas pode ser visto na figura 35.

Figura 35 – Placa de Circuito Finalizado



Fonte: Autor

5.3 MODELAGEM MATEMÁTICA

A primeira etapa de um projeto de qualquer sistema de controle é se ter o modelo matemático que descreve a dinâmica do sistema. Neste tópico serão abordadas as equações diferenciais que regem o sistema do pêndulo invertido. A figura 36 mostra o diagrama de corpo livre do protótipo. E a descrição das variáveis pode ser vista na tabela 2.

Figura 36 – Diagrama de Corpo Livre do Protótipo

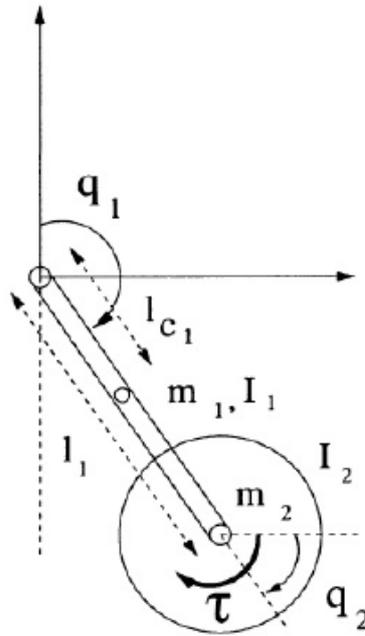


Tabela 2 – Descrição das Variáveis

Variável	Descrição
q_1	Posição do Pêndulo
m_1	Massa do Pêndulo
q_2	Posição da Roda de Reação
m_2	Massa da Roda de Reação
m	Massa total do conjunto
J_1	Momento de Inércia do Pêndulo
J_2	Momento de Inércia da Roda de Reação
J	$(J_1 + J_2)$
i	Corrente de Entrada no motor
k	Constante de torque do motor
l_p	Distância entre o pivô e o centro de massa do pendulo

Fonte: (NAVARRO; SUN, 2013)

Quando refere-se a “pêndulo”, consideram-se inclusos todos os demais sistemas, como motores, *encoders*, fixações e cabos de comunicação e força. Para simplificar o tamanho das equações a serem deduzidas, serão criados novos parâmetros, em termos das listadas na tabela 2.

De acordo com Block, Åström e Spong (2007), o comportamento de um pêndulo pode ser descrita em termos de sua energia. pode-se definir as equações de energia cinética e potencial. A energia cinética será definida por K , e a energia potencial por P . Pelo sistema ter dois graus de liberdade, é necessário definir a energia tanto para o pêndulo como para a roda de reação. A equação 5.1 descreve a energia cinética do pêndulo e será chamada K_p e a equação 5.2 descreve a energia cinética da roda de reação, que está sujeita ao movimento do pêndulo, e será chamada K_r . A energia potencial do pêndulo será chamada P .

$$K_p = \frac{1}{2} J \dot{q}_1^2 \quad (5.1)$$

$$K_r = \frac{1}{2} J_2 \dot{q}_2^2 \quad (5.2)$$

Portanto, a energia cinética total do sistema é

$$K = K_p + K_r \quad (5.3)$$

E substituindo as equações 5.1 e 5.2 na equação 5.3,

$$K = \frac{1}{2} J \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{q}_2^2 \quad (5.4)$$

A energia potencial do pêndulo pode ser definida como:

$$P = mgh = mgl_p[1 - \cos(q_1)] \quad (5.5)$$

A partir das equações 5.4 e 5.5, pode-se escrever as equações lagrangianas, que são definidas pela diferença entre energia cinética e potencial.(CAETANO, S.D) A equação de Euler-Lagrange é descrita na equação 5.6.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau \quad (5.6)$$

Onde $L = K - P$ é definido como o lagrangiano do sistema. Como o sistema é de duas variáveis, deve-se separar a modelagem em dois Lagrangianos, um referente ao pêndulo, L_p e outro referente à roda, L_r .

$$L_p = \frac{1}{2} J \dot{q}_1^2 - mgl_p[1 - \cos(q_1)] \quad (5.7)$$

$$L_r = \frac{1}{2} J_2 \dot{q}_2^2 \quad (5.8)$$

Em seguida, deve-se tratar de suas respectivas derivadas parciais e totais.

$$\frac{\partial L_p}{\partial \dot{q}_1} = J \dot{q}_1 \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_2} = J_2 \dot{q}_2 \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial L_p}{\partial q_1} = -mgl_p \text{sen}(q_1) \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial q_2} = 0 \quad (5.12)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_p}{\partial \dot{q}_1} = J \ddot{q}_1 \quad (5.13)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_2} = J_2 \ddot{q}_2 \quad (5.14)$$

O torque gerado por um motor elétrico é proporcional à corrente que o alimenta, e considerando ainda que o torque transmitido ao pêndulo é no sentido oposto ao gerado no rotor do motor elétrico, pode-se considerar a relação 5.15:

$$\begin{aligned} \tau &= ki \\ \tau_r &= ki \\ \tau_p &= -ki \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_p}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = J \ddot{q}_1 + mgl_p \text{sen}(q_1) = -ki \quad (5.16)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = J_2 \ddot{q}_2 = ki \quad (5.17)$$

A corrente do motor será controlada através de um pulso PWM, portanto a corrente é proporcional ao comando de controle u_{pwm} , que varia de 0 a 255, e o valor 255 representa a tensão máxima disponível para o circuito. Portanto:

$$ki = k_u u_{pwm} , \text{ onde } |u| \leq 255 \quad (5.18)$$

Por fim, deve-se considerar o atrito na modelagem. O coeficiente de atrito do pêndulo

será denominado b_p e o coeficiente de atrito viscoso entre rotor e estator do motor pode ser definido de acordo com a equação 5.19. (ROSA; MOMBACH; BREGALDA, 2013)E o termo k_u pode ser calculado a partir da equação 5.18.

$$b_r = \frac{E_a I_a}{\omega_m^2} \quad (5.19)$$

$$k_u = \frac{k_i}{u_{pwm}} \quad (5.20)$$

As equações 5.16 e 5.17 podem ser reescritas e simplificadas em termos de 5.18:

$$\ddot{q}_1 = \frac{-k_u}{J} u_{pwm} - \frac{b_p}{J} \dot{q}_1 - \frac{mgl_p}{J} \text{sen}(q_1) \quad (5.21)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{k_u}{J_2} u_{pwm} - \frac{b_r}{J_2} \dot{q}_2 \quad (5.22)$$

5.3.1 Linearização da Planta

Como a etapa de levantamento do pêndulo tem uma extensão angular muito grande, a linearização ocorrerá somente em torno do ângulo π , que é o foco de controle. Para isso, serão linearizadas as equações 5.21 e 5.22. A linearização será efetuada para possibilitar que a realimentação dos estados, e alocação de polos conveniente, seja feita de forma mais fácil.

Considerando uma representação no espaço de estados, pode-se adotar as variáveis de estado:

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 \\ x_2 &= \dot{q}_1 \\ x_3 &= q_2 \\ x_4 &= \dot{q}_2 \\ u &= u_{pwm} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Pode-se definir as funções $f_1 = x_2$, $f_2 = \dot{x}_2$, $f_3 = x_4$, $f_4 = \dot{x}_4$ para linearizar o sistema em torno dos nossos pontos de equilíbrio, x_e através das matrizes $A = \partial f / \partial x$ e $B = \partial f / \partial u$. (QUEIROZ, 2016)

Como há dois pontos de equilíbrio no pêndulo invertido, pode-se linearizá-lo tanto para 0 rad como para π rad, porém, como só interessa o controle no seu ponto máximo, utiliza-se somente o ângulo $x_e = \pi$ rad.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-mgl_p}{J} \cos(x_e) & \frac{-b_p}{J} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-b_r}{J_2} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-k_u}{J} \\ 0 \\ \frac{k_u}{J_2} \end{bmatrix}$$

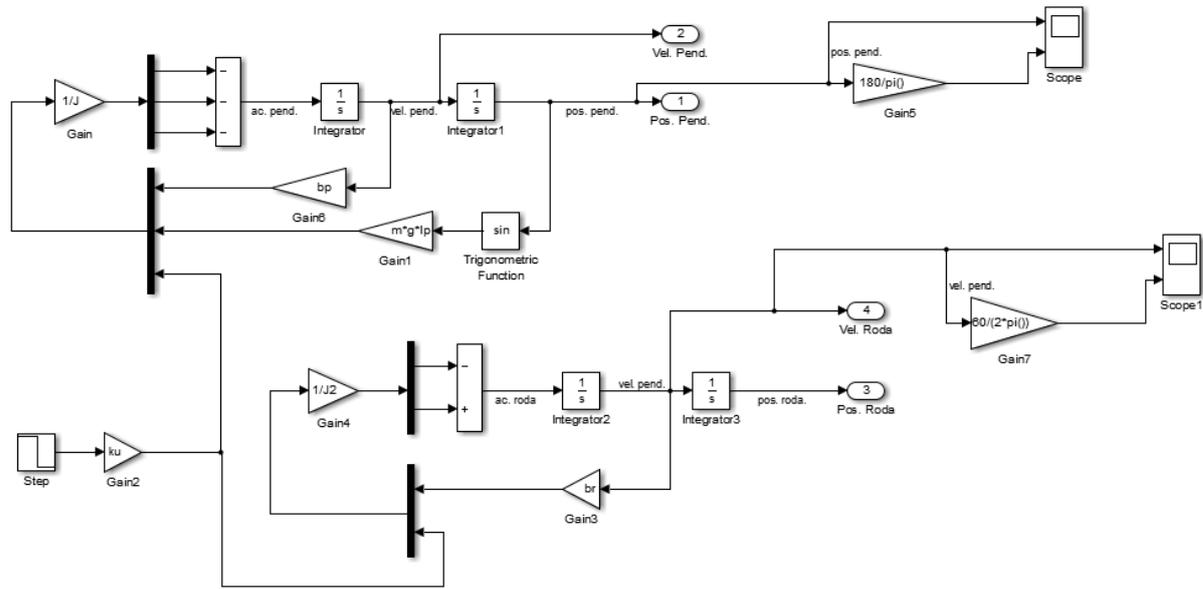
Aplicando o ponto de equilíbrio às matrizes demonstradas em 5.24 e retornando às variáveis principais, chega-se ao sistema linearizado.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mgl_p}{J} & \frac{-b_p}{J} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-b_r}{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-k_u}{J} \\ 0 \\ \frac{k_u}{J_2} \end{bmatrix} u \quad (5.25)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

O diagrama de blocos da planta pode ser visto na figura 37

Figura 37 – Diagrama de Blocos da Planta Modelada



Fonte: Autor

5.4 PROJETO DO CONTROLADOR

O Controle do sistema se dá em duas partes. Inicialmente, levanta-se o pêndulo até seu ponto de operação, onde o controlador por realimentação de estados será utilizado. Para isso, é necessário elevá-lo até as proximidades do ângulo π . A figura 16 mostra a região de atuação de ambos os controladores.

5.4.1 Controle de Levantamento

Block, Åström e Spong (2007) demonstraram que é possível levantar o pêndulo utilizando controle de energia proposto por Lyapunov. A início de análise, toma-se a energia total do sistema, dado pela soma das energias cinética e potencial, demonstrado nas equações 5.1 e 5.5.

$$E = \frac{1}{2} J \dot{q}_1^2 + mgl_p [1 - \cos(q_1)] \quad (5.27)$$

O termo $1 - \cos(q_1)$ representa energia potencial nula quando $q_1 = 0$, seu ponto mais baixo, e energia potencial máxima quando $q_1 = \pi$, seu ponto mais alto. O objetivo é alcançar o topo com velocidade praticamente nula, ou seja, $\dot{q}_1 = 0$ e $q_1 = \pi$. Nessas condições, pode-se definir E_0 como a energia do sistema no seu ponto mais alto.

$$E_0 = 2mgl_p \quad (5.28)$$

Segundo o teorema de estabilidade de Lyapunov, demonstrado por Morales (2017), se existir uma função definida positiva em que sua derivada seja negativa independente das circunstâncias, o sistema pode vir a ser estável. Seguindo o exemplo dado por Morales (2017), em suas notas de aula, pode-se definir a função candidata em 5.29 e sua derivada em 5.30.

$$V(q_1, \dot{q}_1) = \frac{X^2}{2}, \text{ onde } X = (E - E_0) \quad (5.29)$$

$$\dot{V}(q_1, \dot{q}_1) = (E - E_0)\dot{E} = (E - E_0)[J\ddot{q}_1 + mgl_p \text{sen}(q_1)]\dot{q}_1 \quad (5.30)$$

As equações 5.16 e 5.18 mostram que

$$J\ddot{q}_1 + mgl_p \text{sen}(q_1) = -k_u u_{pwm} \quad (5.31)$$

A função candidata do sistema se torna 5.32:

$$\dot{V}(q_1, \dot{q}_1) = -(E - E_0)(k_u u_{pwm})\dot{q}_1 = -[(E - E_0)k_u \dot{q}_1]u_{pwm} \quad (5.32)$$

Este resultado mostra que quando a entrada $u_{pwm} = 0$, a variação de energia do sistema é nula, ou seja, se conserva. Agora, deve-se escolher u_{pwm} de modo que $\dot{V}(q_1, \dot{q}_1) < 0$.

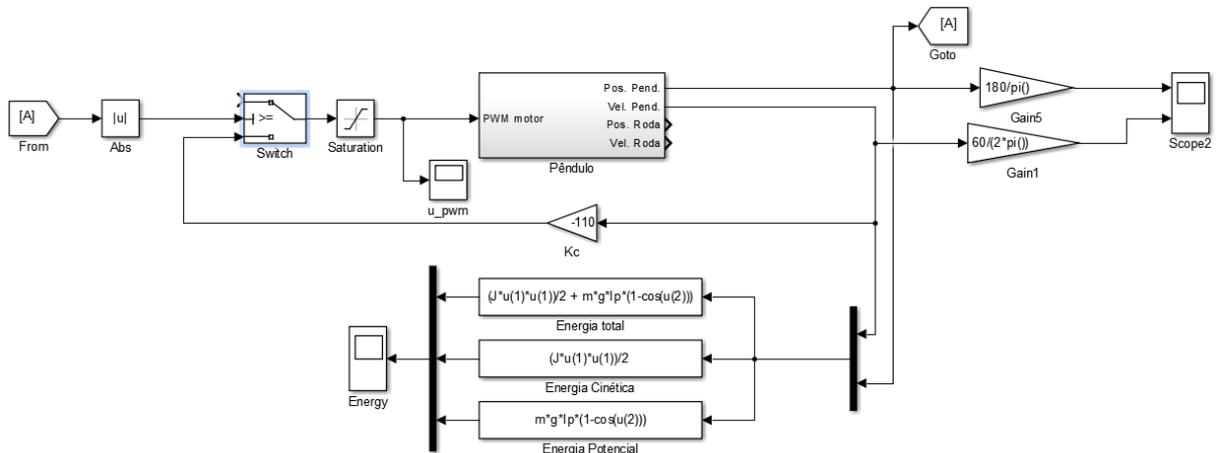
$$u_{pwm} = \dot{q}_1 K_c \quad (5.33)$$

Sendo K_c um ganho definido de forma experimental. Dessa forma, tem-se a equação 5.34, que é definida negativa em toda sua extensão, visto que a energia E , durante o levantamento, será sempre menor que a energia total do sistema.

$$\dot{V}(q_1, \dot{q}_1) = -K_c [(E - E_0)k_u \dot{q}_1^2] \quad (5.34)$$

O diagrama de blocos integrando a planta com o controle de levantamento pode ser visto na figura 38. Foi ainda inserido uma tela para monitorarmos a energia do sistema e uma saturação na entrada do motor para considerar a limitação do pulso PWM aplicado ao motor. O ganho escolhido que apresentou melhor resposta foi -110. Essa técnica de controle para o levantamento baseado em energia é, essencialmente, uma espécie de realimentação de estados, visto que há somente um ganho da velocidade do pêndulo realimentada de forma negativa para a entrada.

Figura 38 – Diagrama de Blocos do Controle de Levantamento



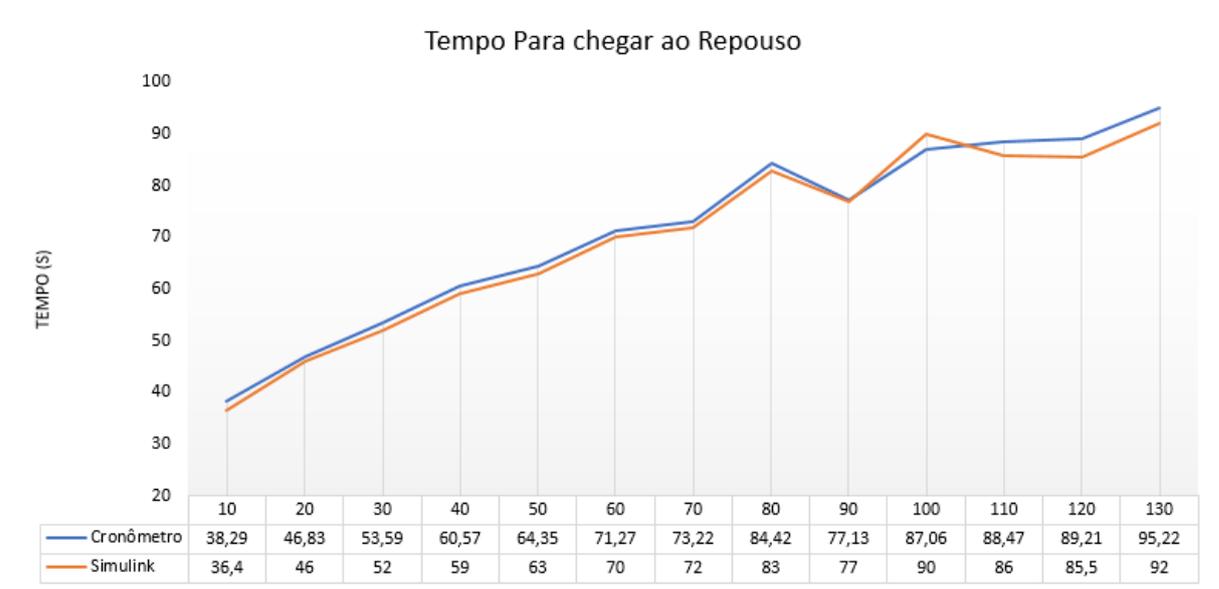
Fonte: Autor

5.4.2 Definição dos Parâmetros físicos

Os parâmetros físicos, que definirão o comportamento dinâmico do sistema podem ser vistos na tabela 3. Os dados numéricos de momento de inércia, foram obtidos com o auxílio do *software* de modelagem Autodesk[®] Inventor[®] Professional 2016 e 2017.

Como o coeficiente de atrito do pêndulo é variável de acordo com o ângulo, foi realizado um ensaio para determinar este valor medindo-se os tempos que se leva para sair de vários ângulos de referência e chegar ao repouso. O gráfico dos tempos pode ser visto na figura 39 e de acordo com a modelagem matemática, o valor $b_p = 0.0035$ foi encontrado de forma experimental quando comparado medições e simulações.

Figura 39 – Tempo de Repouso



Fonte: Autor

No que diz respeito à fricção do motor, o coeficiente b_r do motor é cerca de 0.012, novamente descoberto de forma experimental. O Coeficiente k_u que melhor se adequa à dinâmica do nosso sistema físico tem o valor de 0.0003.

Tabela 3 – Parâmetros Físicos do Sistema

Parâmetro	Valor [Unidade SI]
m	0.65 [kg]
l_p	0.38 [m]
J	13.4×10^{-3} [kgm ²]
J_2	11.5×10^{-5} [kgm ²]
b_p	0.0035
k_u	0.0003
b_r	0.012

Fonte: Autor

5.4.3 Controle de Estabilidade

Aplicando os dados numéricos ao sistema linearizado, temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 180.8261 & -0.26119 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -104.348 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.022339 \\ 0 \\ 2.608696 \end{bmatrix} u \quad (5.35)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Deve-se, antes de tudo, verificar se o sistema realmente é controlável e observável, para que seja possível alocar os polos de forma correta. Para isto, foram utilizadas as matrizes de controlabilidade e observabilidade propostas por Kalman et al. (1960). (JÚNIOR, 2016)

$$P_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Utilizando as matrizes A , B e C encontradas em 5.35 e 5.36, temos a matriz de controlabilidade P_c definida em 5.39 e a matriz de observabilidade M_{ob} definida em 5.40. Os valores numéricos destas matrizes foram calculados utilizando um programa desenvolvido no MATLAB[®], o código pode ser visto no Apêndice B.

$$P_c = \begin{bmatrix} 0 & -0.022339 & 0,005848 & -4.04987 \\ -0.022339 & 0,005848 & -4.04987 & 2.115207 \\ 0 & 2.608696 & -272.212 & 28404.7 \\ 2.608696 & -272.212 & 28404.7 & -2963969 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 180.8261 & -0,26119 & 0 & 0 \\ -47.2307 & 180.8943 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Se o posto de $P_c = n$, sendo n a ordem do sistema, o sistema é completamente controlável e se o posto de $M_{ob} = n$, o sistema é completamente observável, pode-se confirmar ainda, que se $\det(P_c) \neq 0$ e $\det(M_{ob}) \neq 0$, ou seja, suas linhas ou colunas forem linearmente independentes, tem-se o mesmo resultado com relação à controlabilidade e observabilidade do sistema.

$$\text{posto}(P_c) = 4, \text{ e } |P_c| = -6587.61 \quad (5.41)$$

$$\text{posto}(M_{ob}) = 2, \text{ e } |M_{ob}| = 0 \quad (5.42)$$

Este resultado mostra que o sistema é controlável, porém não é observável. Isso ocorre devido a um cancelamento de algum polo e zero na função de transferência do sistema. Tal resultado implica que o sistema pode ser controlado pela realimentação de estados, porém não é possível a utilização de observadores de estado. (ZUBEN, 2010) Pela matriz A do sistema, sabe-se que o estado x_3 , ou seja, a posição da roda de reação não influencia na dinâmica de nenhum outro estado e nem na saída, o que reforça o resultado de observabilidade, que já era esperado. Demonstrando o cancelamento de polos, a função de transferência do sistema é descrita em 5.43. Verifica-se que dois polos e dois zeros se cancelam em 5.44, gerando o resultado visto anteriormente.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} + D \quad (5.43)$$

Desenvolvendo a equação 5.43, chegamos à função de transferência para o sistema linearizado.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-0,02238s(s + 104,348)}{s(s + 104,348)(s + 13,5784)(s - 13,3172)} = \frac{-0,02238}{(s + 13,5784)(s - 13,3172)} \quad (5.44)$$

Devido o resultado da equação 5.41, existe uma lei de controle $u = -Kx$ onde é possível alocar os polos do sistema de acordo com a equação 5.45. (MORALES, 2017).

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \cdots & -k_n \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

O ponto de linearização é estável se, e somente se o polinômio demonstrado em 5.46 for

um polinômio Hurwitz, ou seja, todos os coeficientes são números reais positivos e cujos zeros estão todos localizados no semi-plano esquerdo do plano complexo. Este polinômio satisfaz o critério de estabilidade proposto por Routh-Hurwitz.(MORALES, 2017)

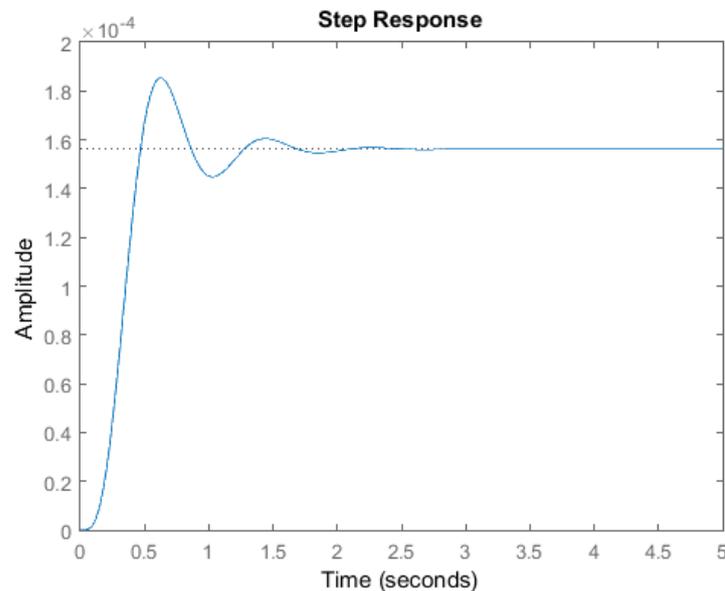
$$s^n + k_n s^{n-1} + k_{n-1} s^{n-2} + \dots + k_1 \quad (5.46)$$

Por se tratar de um sistema de ordem 4, a equação característica terá grau 4, por isso serão escolhidos 2 polos dominantes complexos conjugados para definir a dinâmica do sistema, e dois polos reais distantes da origem para terem pouca influência na resposta. Com o auxílio dos gráficos de degrau do MATLAB[®], foi escolhido o comportamento desejado para o pêndulo quando chegar ao topo. Os polos escolhidos podem vistos em 5.47 e a resposta ao degrau unitário do sistema está descrito na figura 40.

O sistema proposto tem tempo de assentamento de 1,54 s, um sobre-sinal de 18,6%. A resposta final do sistema é 0,000156, ou seja, quando aplicado ao pêndulo irá gerar praticamente um erro zero. Para isso, escolhemos um fator de amortecimento $\zeta = 0.3$ e uma frequência natural $\omega_n = 8$ rad/s, e dois polos distantes da origem em $s = -10$.

$$\begin{aligned} p_1 &= -10 \\ p_2 &= -10 \\ p_3 &= -2,4 + 7,63i \\ p_4 &= -2,4 - 7,63i \end{aligned} \quad (5.47)$$

Figura 40 – Resposta ao Degrau dos polos escolhidos



Fonte: Autor

Para os polos escolhidos, a equação característica é dada por 5.48. Devido a 5.45 estar descrita na forma canônica controlável, sabemos que seus autovalores são a solução de 5.48.

$$Q(\lambda) = \lambda^4 + 24.8\lambda^3 + 260\lambda^2 + 1760\lambda + 6400 \quad (5.48)$$

$$|\lambda I - (A - BK)| = Q(\lambda) \quad (5.49)$$

A solução da equação 5.49 será o ganho da realimentação de estados. Pode-se ainda calcular diretamente a matriz K utilizando a fórmula desenvolvida por Ackermann (JÚNIOR, 2016).

$$K = [0 \cdots 1]M_c^{-1}A_f \quad (5.50)$$

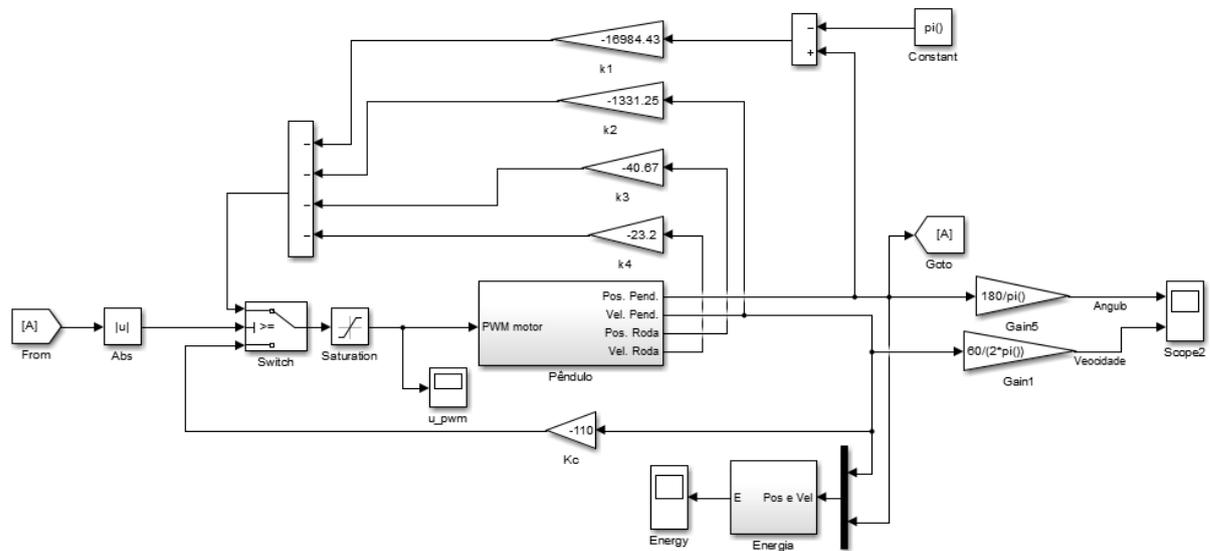
Onde A_f é a matriz de estados dos polos desejados. Resolvendo para λ , tem-se como resultado a matriz K e de igual modo feito com as matrizes de controlabilidade e observabilidade, optamos por fazer um código para confirmar os cálculos feitos. O código para o cálculo da matriz K também se encontra no apêndice B. Ambos os resultados deram bem aproximados um do outro, com diferença apenas nas casas decimais devido ao programa fazer cálculos utilizando o ponto flutuante.

$$K = [-16984,43 \quad -1331,25 \quad -40,67 \quad -23,2] \quad (5.51)$$

Unindo a planta, o controle de levantamento e o controle de estabilidade, o diagrama de blocos final do sistema proposto é mostrado na figura 41. Para a troca entre os tipos de controle foi adicionado um *switch* controlado pelo ângulo do pêndulo que faz a troca automática quando a posição do pêndulo chega em $\pi \pm 10\%$, ou seja, o controle de estabilidade atua no intervalo $[0.9\pi, 1.1\pi] = [162^\circ, 198^\circ]$.

Para garantir que o controlador convergia para o ponto certo, foi subtraído pi do primeiro estado, a posição do pêndulo. Isso faz com que o controle por realimentação de estados leve o sistema para zero quando na verdade, o está levando para o ponto de equilíbrio.

Figura 41 – Diagrama de Blocos da Simulação



Fonte: Autor

5.4.4 Discretização

Devido o uso de uma plataforma com microcontrolador acoplado, não é possível uma comunicação e controle de forma contínua, deve-se portanto utilizar um controle de forma discreta, assim também deve-se verificar a controlabilidade e observabilidade do sistema discretizado. As equações utilizadas para discretizar o sistema são descritas em 5.52, uma discretização temporal, sendo T o tempo de amostragem. (CABRAL, 2016) As matrizes de estado discretizadas não serão utilizadas, visto que a planta é o próprio protótipo, porém elas são necessárias para se calcular a nova matriz de ganhos de realimentação de estados. O controle de levantamento não será alterado e o controle de estabilidade sofrerá alterações nos valores dos ganhos.

$$\begin{aligned}
 A_d &= e^{AT} = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} \\
 B_d &= [e^{AT} - I] A^{-1} B \\
 C_d &= C
 \end{aligned}
 \tag{5.52}$$

Tomando as equações 5.35 e 5.36, com o auxílio do comando $[A_d, B_d] = c2d(A, B, T)$, do MATLAB[®], temos o sistema discretizado com as seguintes matrizes de estado e entrada:

$$\begin{bmatrix} x_{1_{k+1}} \\ x_{2_{k+1}} \\ x_{3_{k+1}} \\ x_{4_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0005 & 0 & 0 \\ 0.0904 & 1.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0005 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0536 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \\ x_{3_k} \\ x_{4_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0013 \end{bmatrix} u_k \quad (5.53)$$

É necessário ainda calcular os novos polos discretos desejados, de acordo com a equação 5.54.

$$z = e^{sT} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= 0,995 \\ z_2 &= 0,995 \\ z_3 &= 0,9988 + 0,0038i \\ z_4 &= 0,9988 - 0,0038i \end{aligned} \quad (5.55)$$

A nova matriz de realimentação de estados K_{disc} , aplicando as matrizes discretizadas é:

$$K_{disc} = \begin{bmatrix} -3017.4 & -230.6 & -13.1 & 51.3 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

Novamente, calculado com o auxílio do programa desenvolvido para as matrizes de controlabilidade e controlabilidade, tem-se um sistema totalmente controlável mas não observável. Como é possível o acesso a todas as variáveis de estado através dos *encoders*, não é necessário a utilização de observadores de estado, uma vez que sua utilização só é precisa devido à eventuais percas dos sinais das variáveis. Resta agora aplicar os blocos para a comunicação com o Arduino ao novo diagrama de blocos.

5.5 AQUISIÇÃO DE DADOS E ACIONAMENTO DO MOTOR

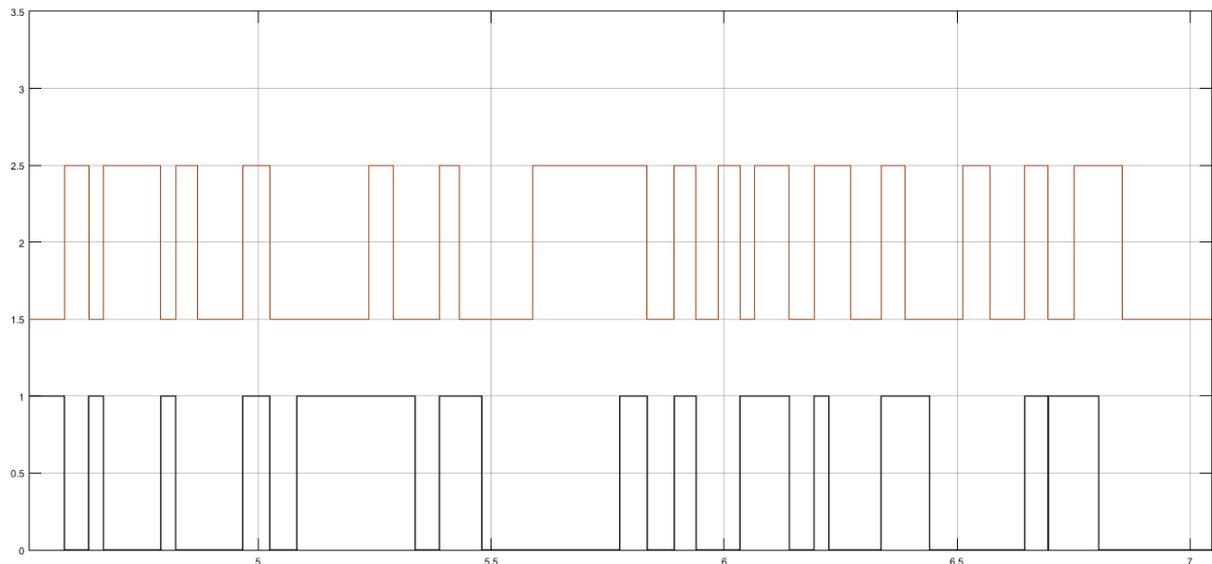
Para controle confiável e executável deve-se, antes de tudo, saber os estados ou valores das variáveis a serem controladas. Para a medição de posição do pêndulo e velocidade da roda, foi escolhido um modelo de *encoder* com 2 canais para medição do sentido de rotação.

5.5.1 Posição

Inicialmente, montou-se um diagrama de blocos no Simulink[®] que fosse capaz de mostrar o comportamento dos *encoders* com base no sinal do seu ciclo de quadratura. Ao

se girar o eixo do *encoder*, tem-se o sinal de ambos os canais descritos na figura 42.

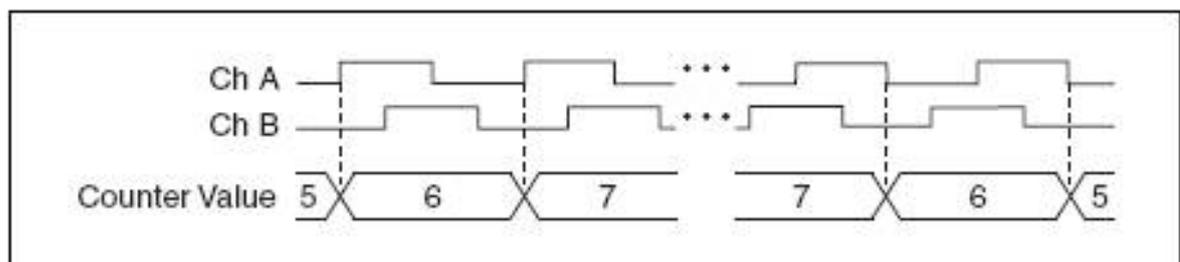
Figura 42 – Sinal de Saída dos *Encoders*



Fonte: Autor

De início, a ideia para medição da posição seria implementar um contador simples, porém, desta forma, não seria possível averiguar o sentido de rotação. Decidiu-se então utilizar uma lógica com base na contagem das bordas de descida e subida, conforme os sinais de quadratura expostos na figura 43.

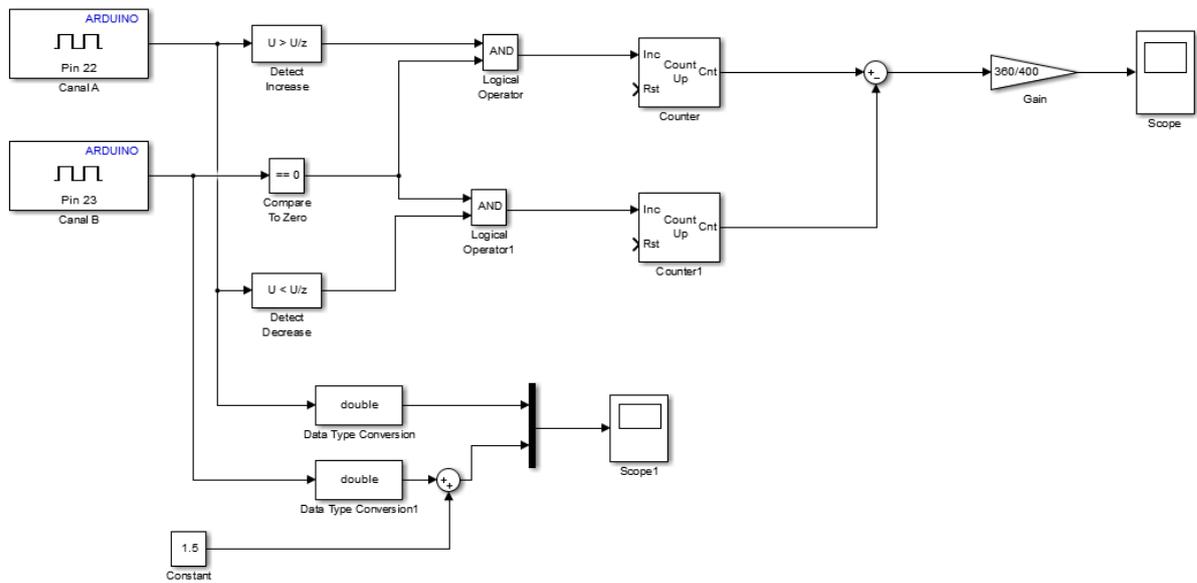
Figura 43 – Método de medição de posição com *Encoder* de quadratura



Fonte: (INSTRUMENTS, 2013)

Desta forma, foi criado um diagrama de blocos que detectasse as bordas de subida e descida do canal A e o comparassem com o estado do canal B, adicionando-se contadores à essas lógicas e operadores de soma aos contadores, chegamos à logica descrita no diagrama de blocos da figura 44. Por ser um *encoder* com resolução de 400 pulsos por rotação, foi adicionado um ganho de $\frac{360}{400}$ para a conversão de pulsos em graus. No momento de inserção da planta e malha de controle, este sinal será convertido para radianos.

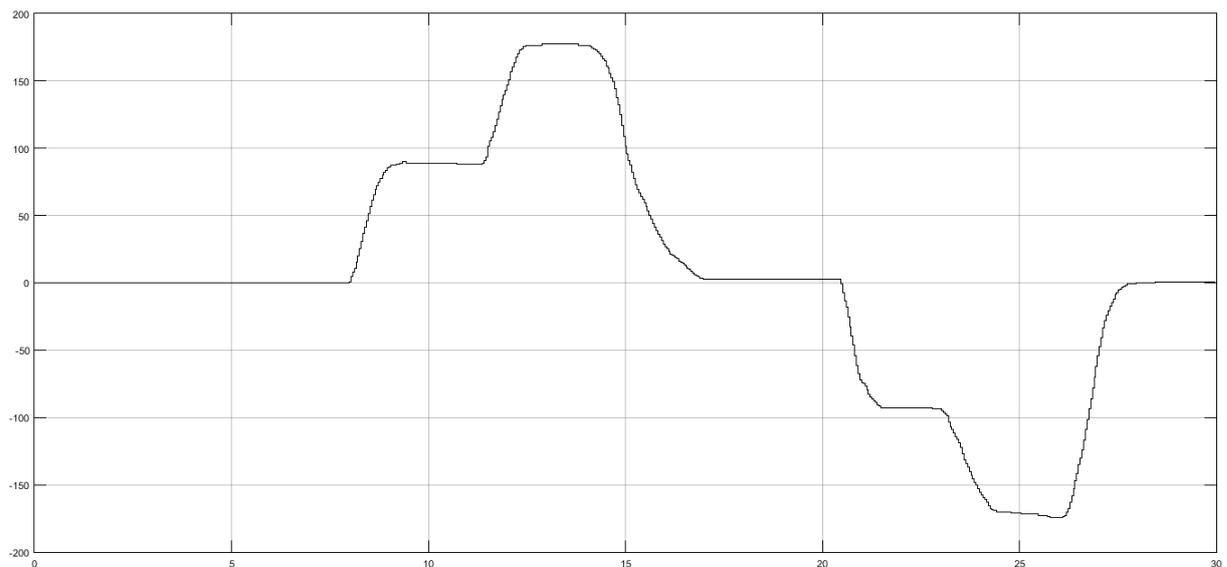
Figura 44 – Diagrama de Blocos de Medição da Posição



Fonte: Autor

Pode-se ver o sinal tratado, com tempo de amostragem de 0,5 milissegundos, resultando numa frequência de aquisição de dados de 2 kHz, na figura 45. Foram testados alguns ângulos de referência, os quais ficam claros na figura. Os ângulos inseridos foram 0, +90, +180, 0, -90, -180 e 0 graus, respectivamente.

Figura 45 – Sinais adquiridos de posição

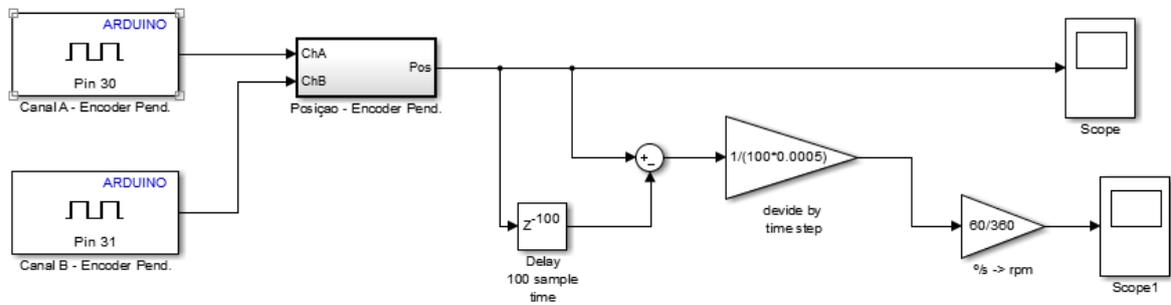


Fonte: Autor

5.5.2 Velocidade

Para a medição acurada de velocidade, foi utilizado a diferença entre as medições de posição e o tempo entre elas, matematicamente, de forma discreta: $v = (x_t - x_{t-1})/T_s$, onde t é o instante de tempo da medição e T_s é o tempo de amostragem do sinal. Contudo, devido a resolução escolhida, utilizar a leitura anterior resultaria sempre em 0 ou 100% de velocidade pois a diferença entre as duas leituras seria sempre a mesma, ou uma unidade a menos. Para resolver isto, foi utilizada uma diferença de medições de 100 amostras de tempo ou cerca de 50 milissegundos, que fornece uma boa aproximação da velocidade real medida. O diagrama de blocos da aquisição de velocidade pode ser visto na figura 46. (CTMS, 2019)

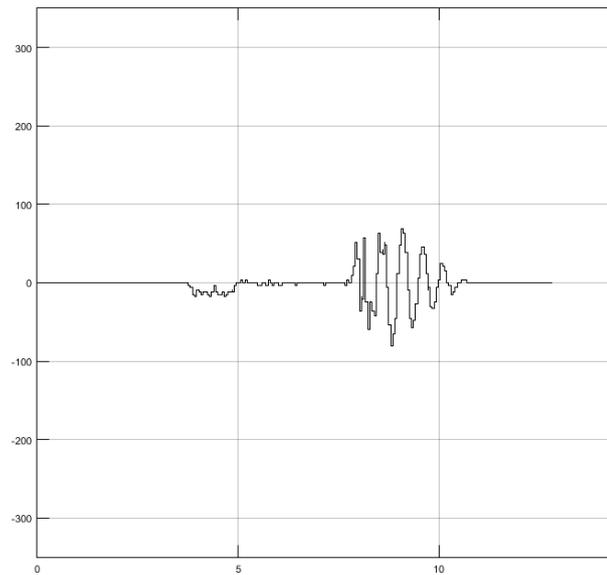
Figura 46 – Diagrama de Blocos de Medição da Velocidade



Fonte: Autor

Uma amostra do sinal de velocidade coletado é mostrado na figura 47. O sinal amostrado é somente do *encoder* e não demonstra o comportamento dinâmico do pêndulo.

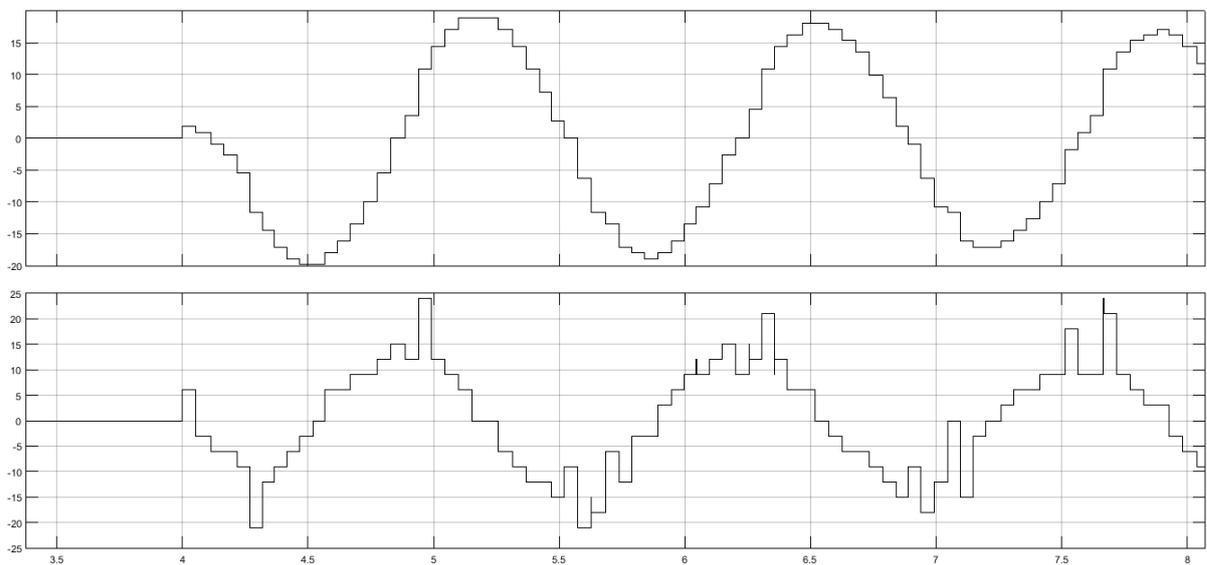
Figura 47 – Sinais adquiridos de velocidade



Fonte: Autor

A figura 48 mostra a posição e velocidade para um determinado movimento, acima a posição e abaixo a velocidade.

Figura 48 – Sinais adquiridos de velocidade e posição comparados



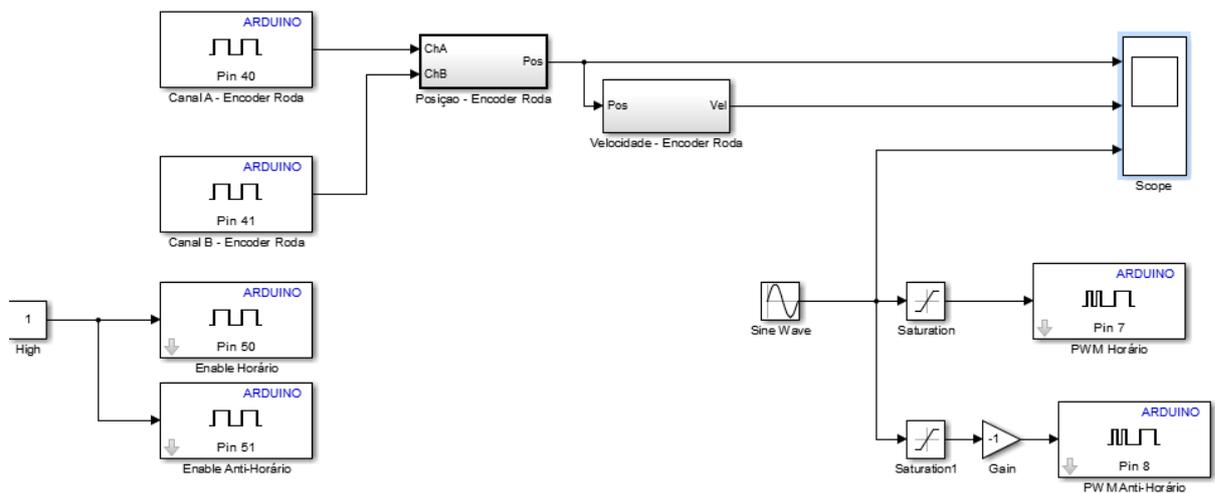
Fonte: Autor

5.5.3 Acionamento do Motor

O Motor será controlado por um pulso PWM, variando de 0 a 255, sendo alimentado por uma fonte externa de 12Vdc. O diagrama de blocos para o acionamento do motor

é mostrado na figura 49. Para verificar o comportamento do motor, foi inserido um sinal senoidal referência para o PWM com frequência de 1 rad/s. Para a possibilidade de movimentação em ambos os sentidos de rotação foi adicionado 2 blocos de saturação, cada um atuará em um ciclo do sinal de referência, positivo e negativo.

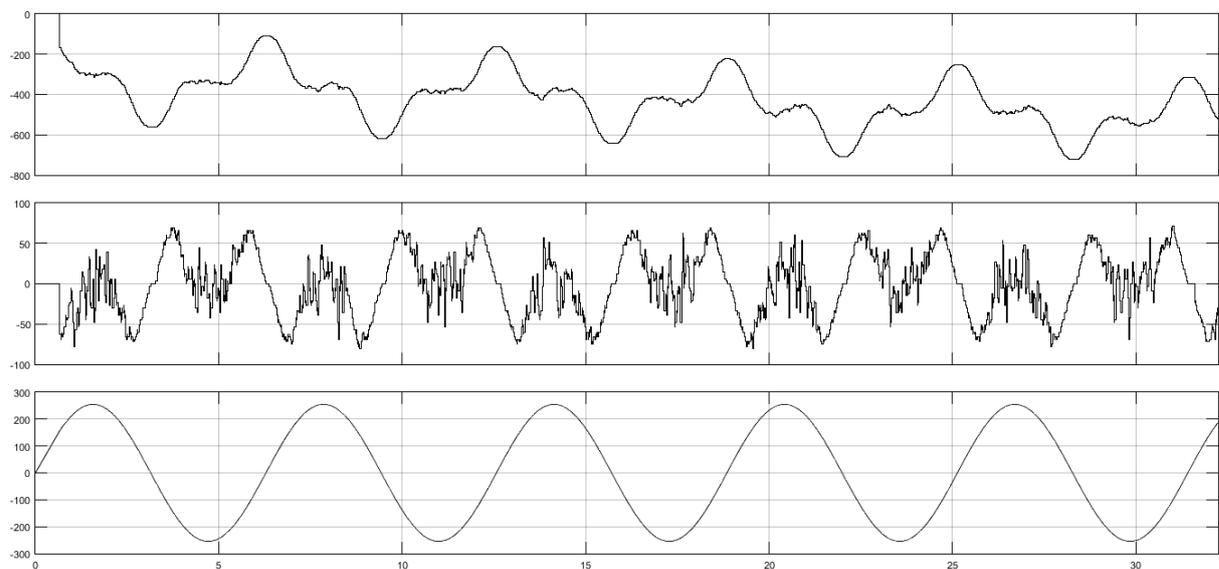
Figura 49 – Diagrama de Blocos para acionamento do motor



Fonte: Autor

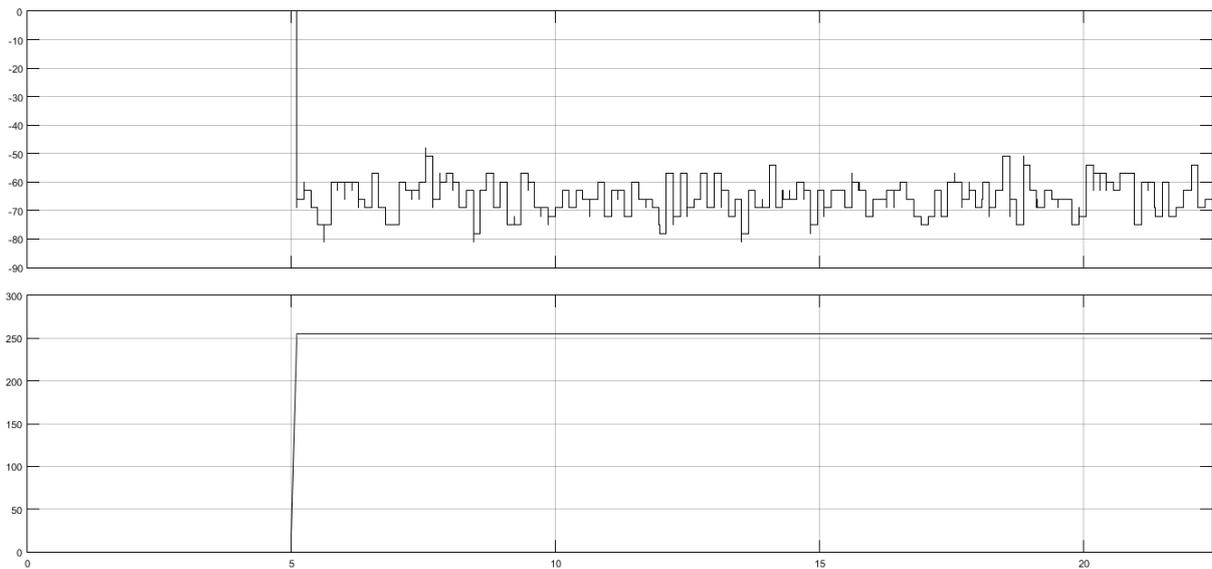
Os gráficos de resposta do motor aos sinais senoidal e degrau unitário podem ser vistos nas figuras 50 e 51 e seu comportamento na mudança súbita de direção pode ser visualizada na figura 52.

Figura 50 – Resposta do Motor ao Sinal Senoidal



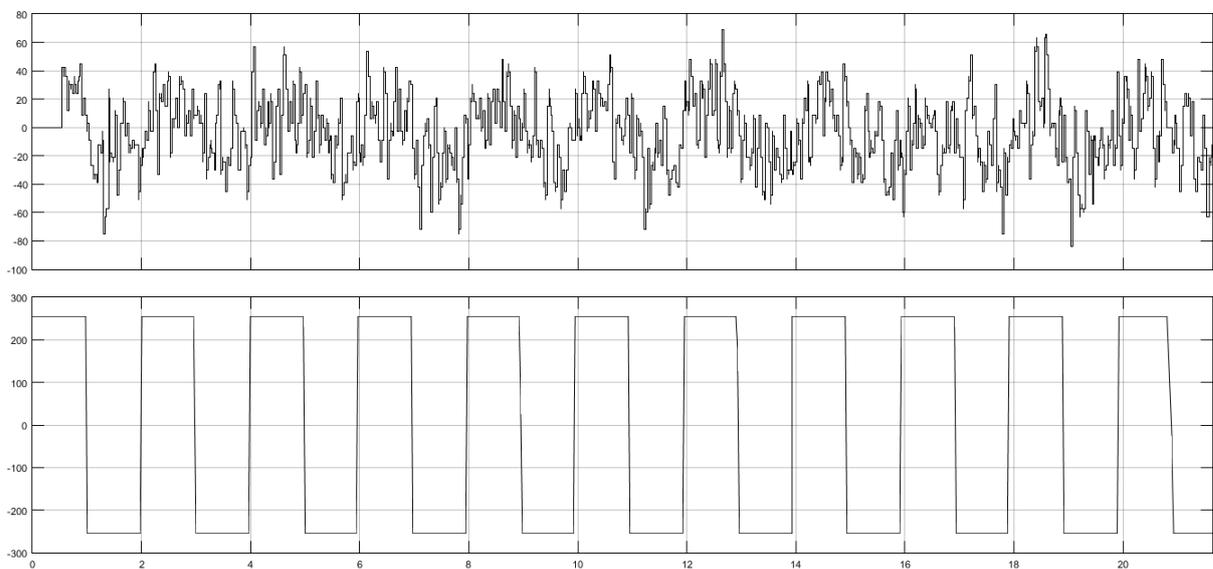
Fonte: Autor

Figura 51 – Reposta do Motor ao Sinal Degrau



Fonte: Autor

Figura 52 – Reposta do Motor ao Sinal de Onda Quadrada



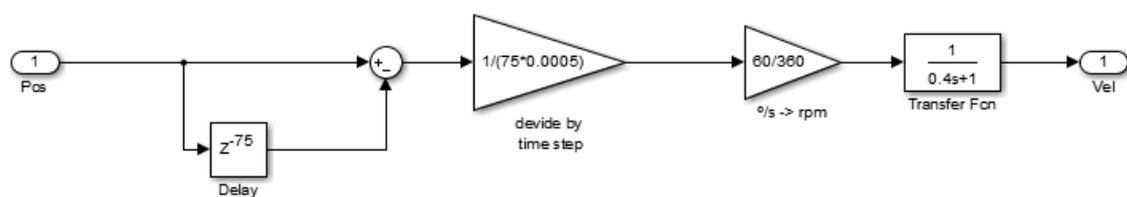
Fonte: Autor

É possível perceber que o sinal de velocidade do motor está com muito ruído. Podem haver vários motivos para isso: o motor realmente está variando a velocidade, a contagem do *encoder* pode estar sendo perdida em algum momento, o tempo de processamento da placa pode não ser o mesmo descrito nos parâmetros do programa e ainda há a questão da amostragem associado à leitura do *encoder*. Para tentar minimizar o efeito do ruído na leitura, foi implementado um filtro passa-baixa na saída da leitura da velocidade,

onde os parâmetros do filtro são escolhidos de forma experimental. (CTMS, 2019) O diagrama de blocos com filtro implementado pode ser visto na figura 53 e as respostas aos sinais senoidal, degrau e onda quadrada podem ser vistos nas figuras 54, 55 e 56, respectivamente.

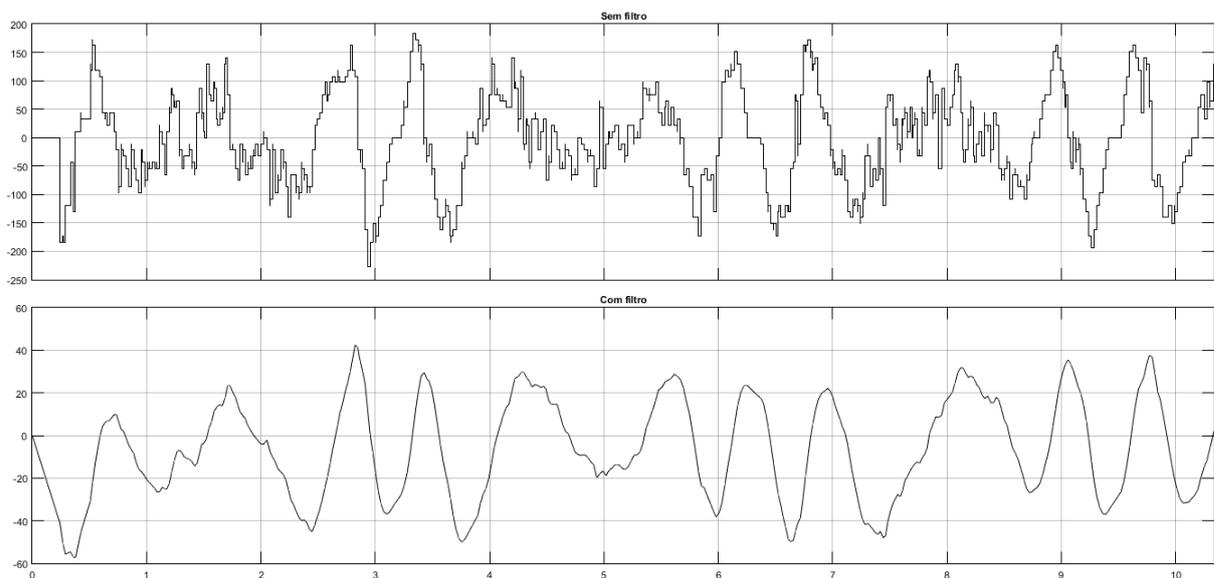
Os coeficientes de frequência de corte do filtro foram escolhidos de forma experimental, visando a maior redução de ruído e ao mesmo tempo evitar a lentidão do sistema dinâmico. Além disso, mudou-se o tempo de cálculo da velocidade para 75 amostras de tempo, o que resulta em cerca de 37,5 milissegundos.

Figura 53 – Diagrama de Blocos para acionamento do motor com filtro



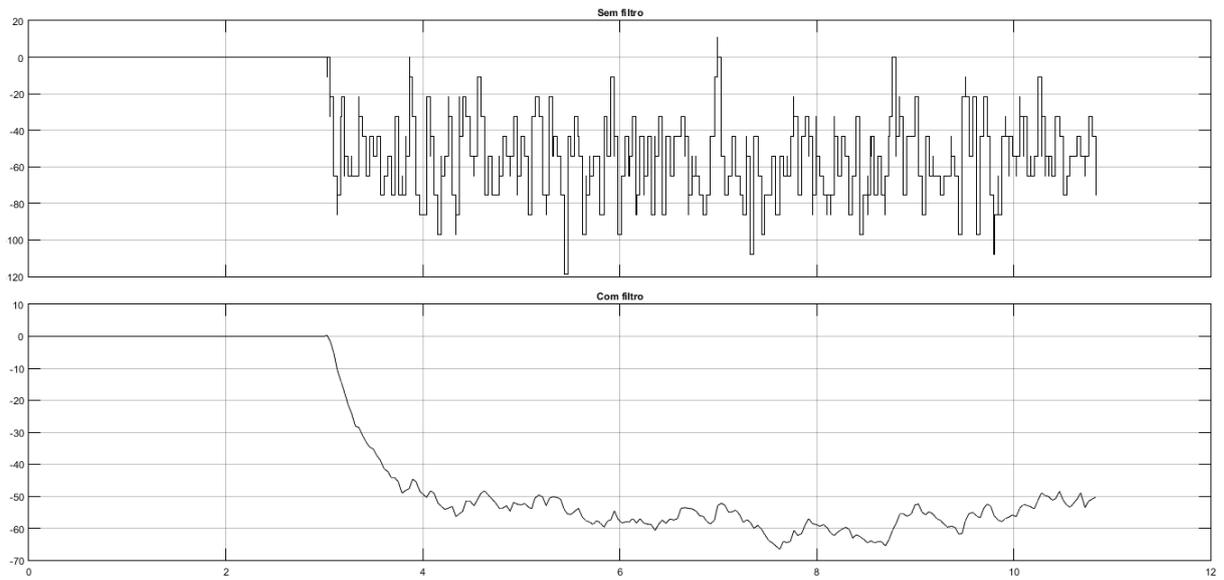
Fonte: Autor

Figura 54 – Reposta do Motor com filtro ao Sinal Senoidal



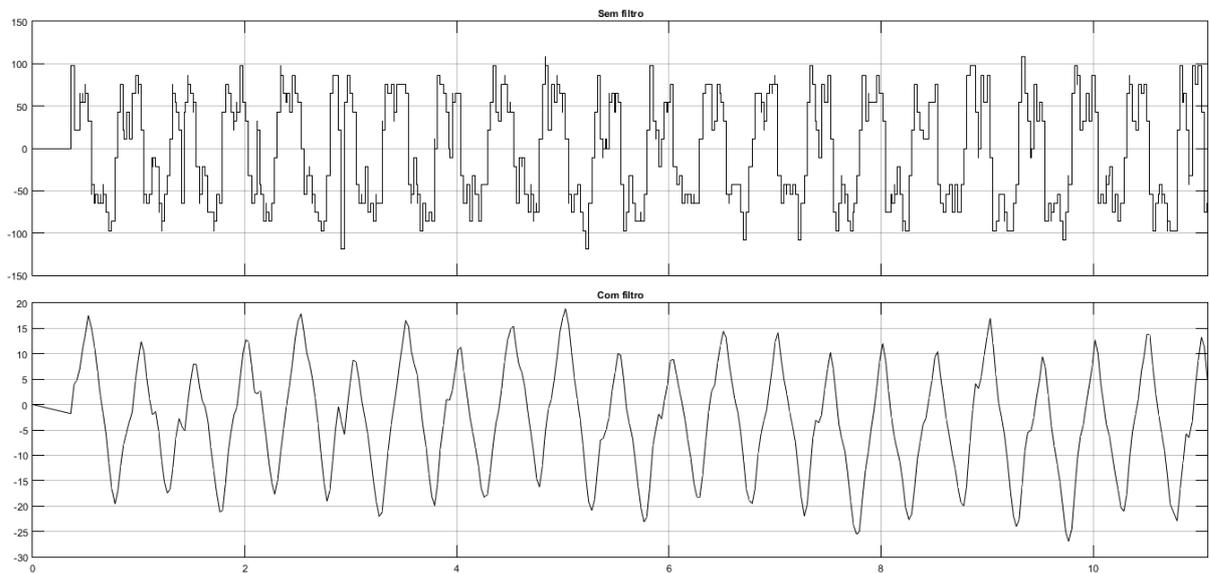
Fonte: Autor

Figura 55 – Resposta do Motor com filtro ao Sinal Degrau



Fonte: Autor

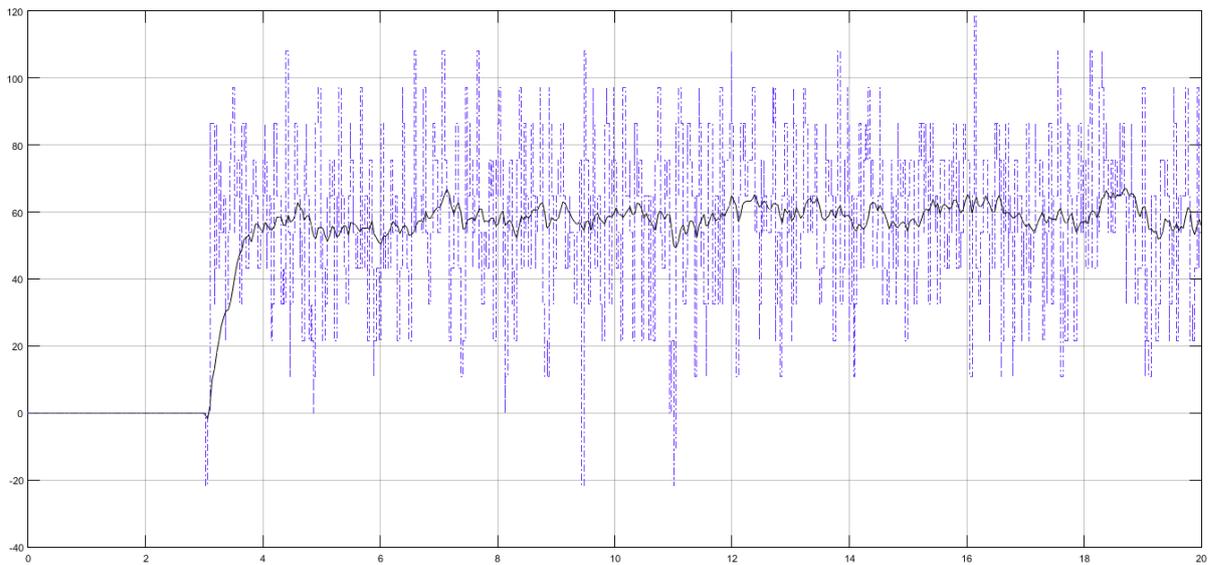
Figura 56 – Resposta do Motor com filtro ao Sinal de Onda Quadrada



Fonte: Autor

Um comparativo entre o sinal filtrado e o não filtrado pode ser visto na figura 57, vemos que o filtro passa-baixa atua de forma satisfatória em relação à eliminação de ruídos, porém sua desvantagem é que, claramente, deixa o sistema um pouco mais lento.

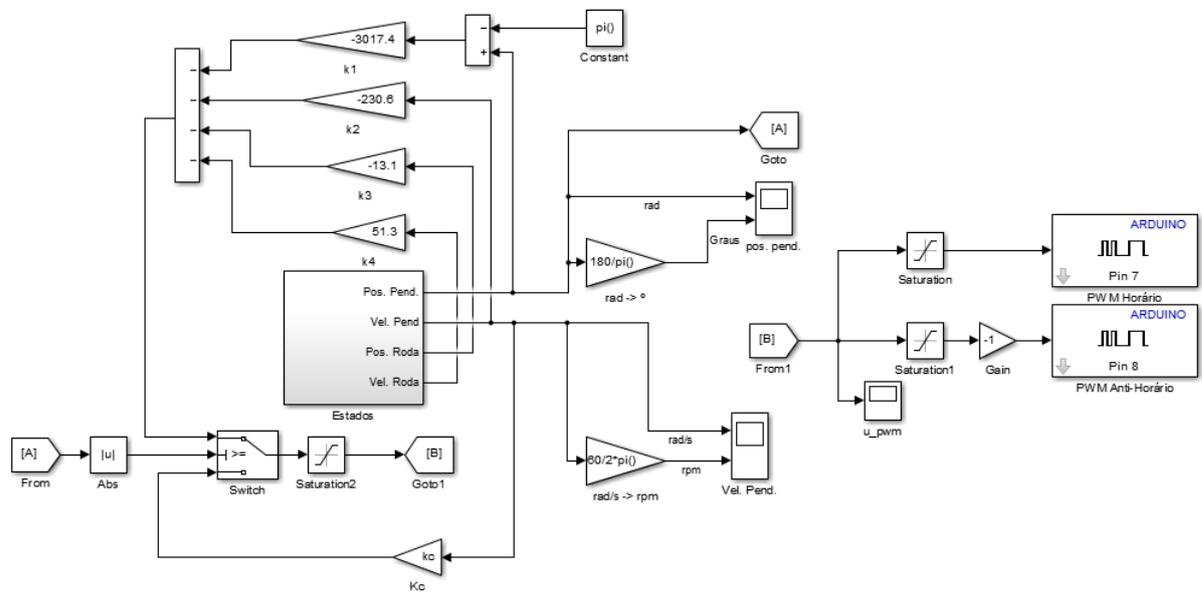
Figura 57 – Sinal filtrado e não filtrado



Fonte: Autor

E por fim, integrando todos os diagramas de blocos mostrados, tem-se o diagrama final para o protótipo. O novo ganho K_c do controle de levantamento é 200.

Figura 58 – Diagrama de Blocos Final do Protótipo com controle

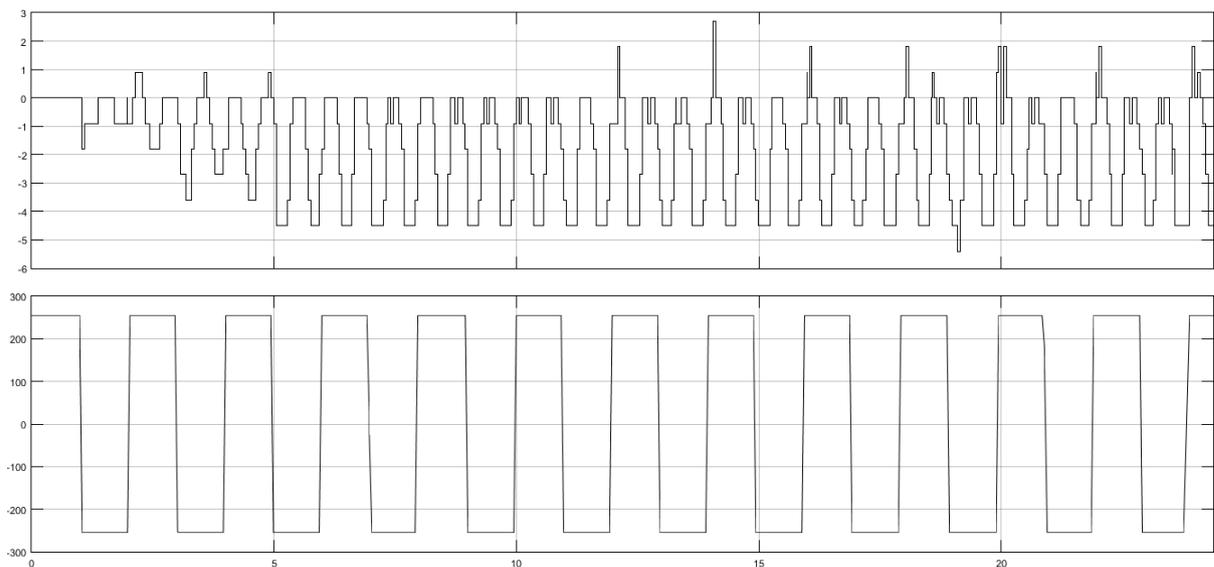


Fonte: Autor

5.6 PROVA DE CONCEITO

Aplicando o mesmo sinal de onda quadrada mostrado na figura 56, a resposta da posição do pêndulo é mostrada na figura 59. O gráfico nos mostra que o torque aplicado ao motor alternadamente é capaz de o movimentar em amplitudes baixas. Porém, como o sinal da onda quadrada tem frequência fixa, suas bordas de subida e descida não coincidem com a posição exata do pêndulo para um controle ótimo, por isso se faz necessário o controle de levantamento.

Figura 59 – Posição do pêndulo quando aplicado Sinal de onda quadrada

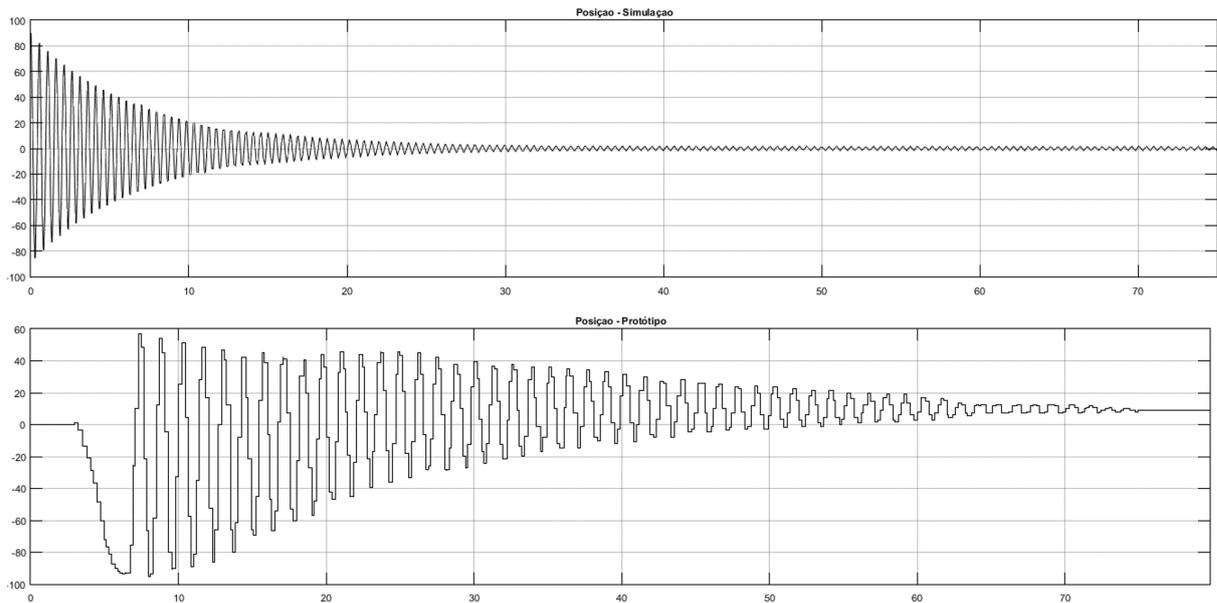


Fonte: Autor

5.7 VALIDAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Inicialmente, a validação da modelagem matemática se deu através de uma comparação entre a simulação e a dinâmica do protótipo. A figura 60 mostra a dinâmica livre do pêndulo quando liberado do ângulo 90° . Nota-se que para deslocamentos com velocidade elevada, ocorre um erro na leitura do *encoder* de cerca de 9° devido à perda de muitos pulsos do *encoder*. Com este resultado espera-se que o protótipo seja controlado de forma satisfatória, mas mais lentamente que na simulação.

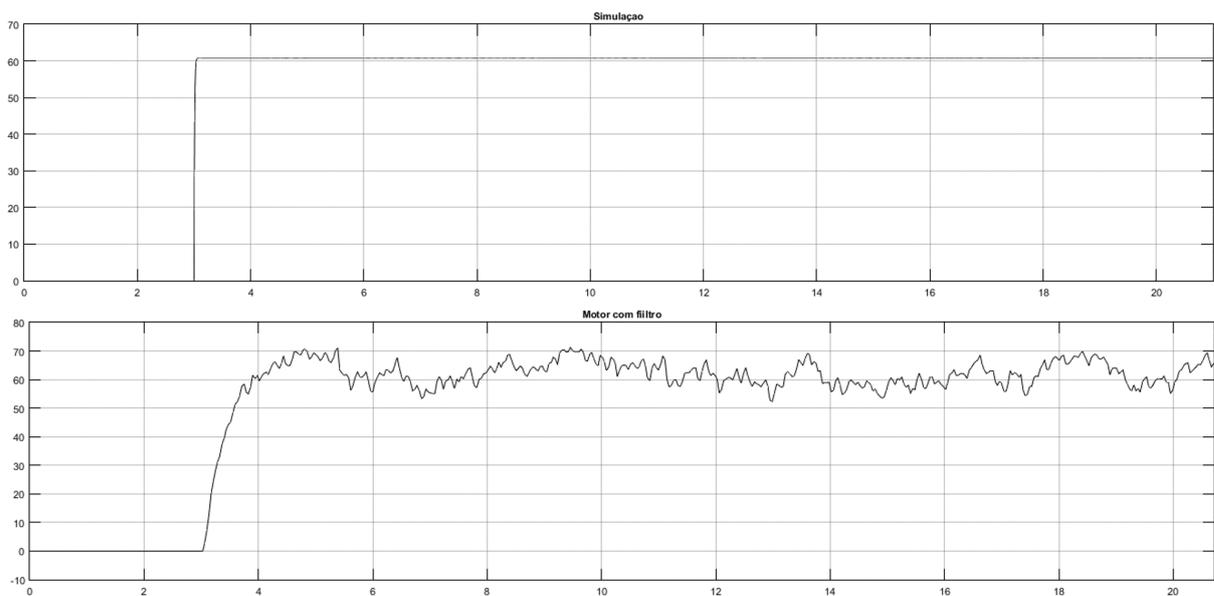
Figura 60 – Dinâmica livre do Pêndulo



Fonte: Autor

Com relação à resposta do motor, foi simulada uma entrada em degrau no valor máximo de PWM e aplicando também ao protótipo. Ambos os valores deram muito próximos de 60 rotações por minuto, o que comprova que a modelagem com relação ao motor é satisfatória.

Figura 61 – Dinâmica no Motor



Fonte: Autor

O erro na leitura de posição é aumentado com o controle de levantamento, realimentando uma informação incorreta no controlador. Não foi possível devido ao tempo de amostragem e conexão entre Simulink[®] e Arduino. Optou-se então por utilizar somente um controle local no próprio Arduino. Foram utilizados os pinos de interrupção com um *baudrate* de 250000. Isso significa que a velocidade de transmissão de dados do Arduino foi aumentada em cerca de 26 vezes em comparação à velocidade de aquisição de dados do programa.

Como o controle proposto não requer funções complexas, e sim apenas a realimentação dos estados, implementou-se um algoritmo com facilidade na própria IDE do Arduino. O Código, adaptado de Karl (2007), do programa pode ser visualizado no Apêndice C. Os dados retirados do monitor serial foram transferidos para o programa Microsoft[®] Excel e então gerados alguns gráficos. Não há *delay* na aquisição de dados de posição, apenas há o aguardo da mudança de estado do sinal do *encoder*, enquanto que a velocidade é calculada a cada 65 milissegundos.

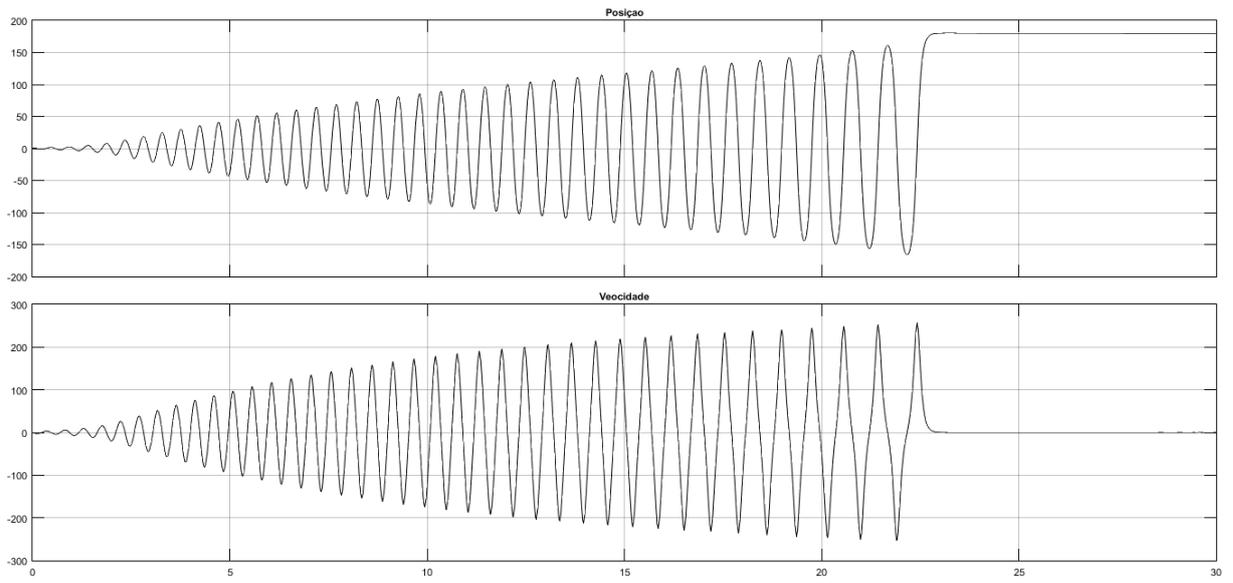
Apesar de ser escrito em forma de código, o controle segue o mesmo diagrama de blocos apresentado na figura 58.

5.8 RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

A simulação do sistema conseguiu estabilizar o pêndulo em cerca de 23 segundos após seu início. Porém para que a simulação possa iniciar, a velocidade do pêndulo não pode ser nula. Para resolver isso, iniciou-se a simulação com o pêndulo na posição de 1°, isso significa que ao se iniciar, ele tende a voltar para o repouso, e com isso sua velocidade aumenta muito pouco, mas o suficiente para iniciar o controle de levantamento.

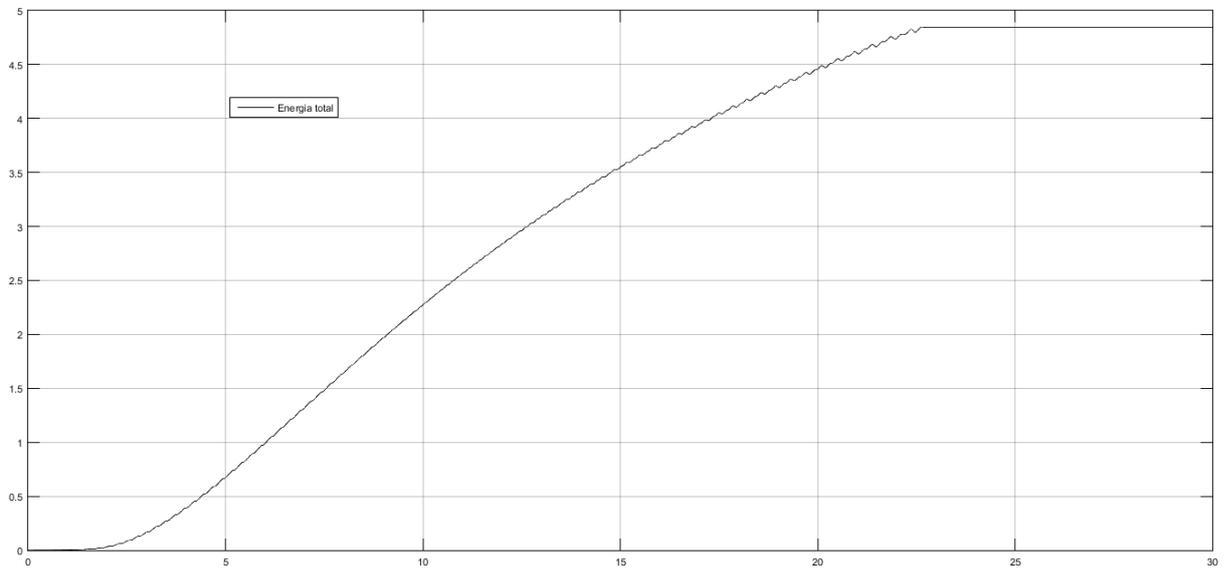
A figura 62 mostra a resposta de posição (acima) e velocidade (abaixo) do pêndulo. As figuras 63 e 64 mostram a energia total do sistema e a variação das energia cinética e potencial, respectivamente.

Figura 62 – Controle do Pêndulo - Simulação



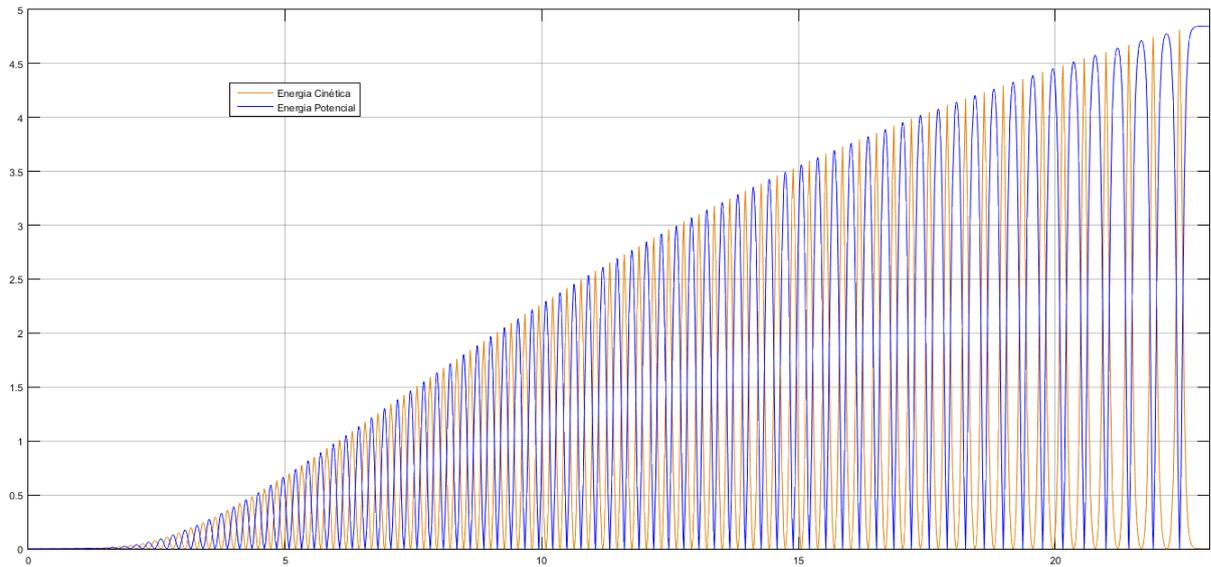
Fonte: Autor

Figura 63 – Energia Total do Sistema



Fonte: Autor

Figura 64 – Energias Cinética e Potencial durante a simulação

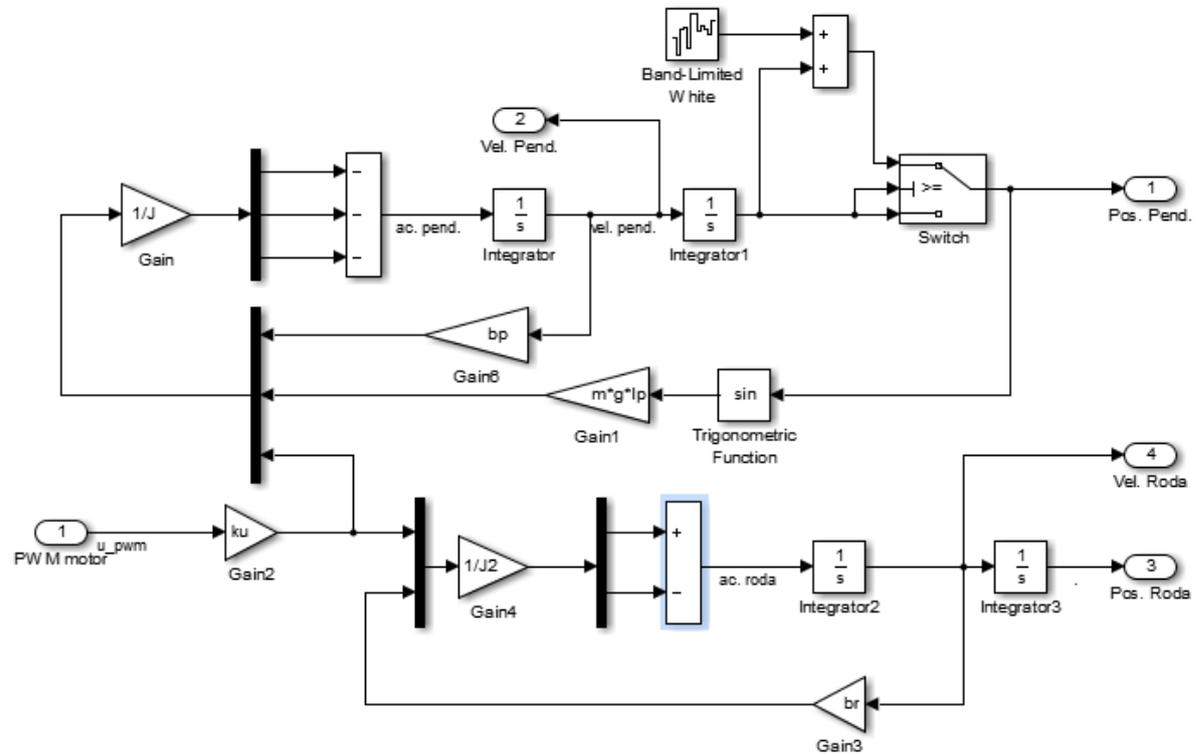


Fonte: Autor

Pode-se verificar que há uma alternância entre energia cinética e potencial durante todo o tempo de simulação, o que já era esperado devido ao movimento de levantamento. Observa-se ainda que ao fim do controle, a energia potencial é máxima e a cinética é nula, o que comprova que nosso pêndulo está no topo.

No sistema modelado, não constavam considerações sobre a robustez com relação a distúrbios. Para verificar como a realimentação se comporta na presença de distúrbios, foi incluído um ruído branco na posição do pêndulo apenas quando este já se encontra na posição de equilíbrio. O novo diagrama de blocos da planta se encontra descrito na figura 65

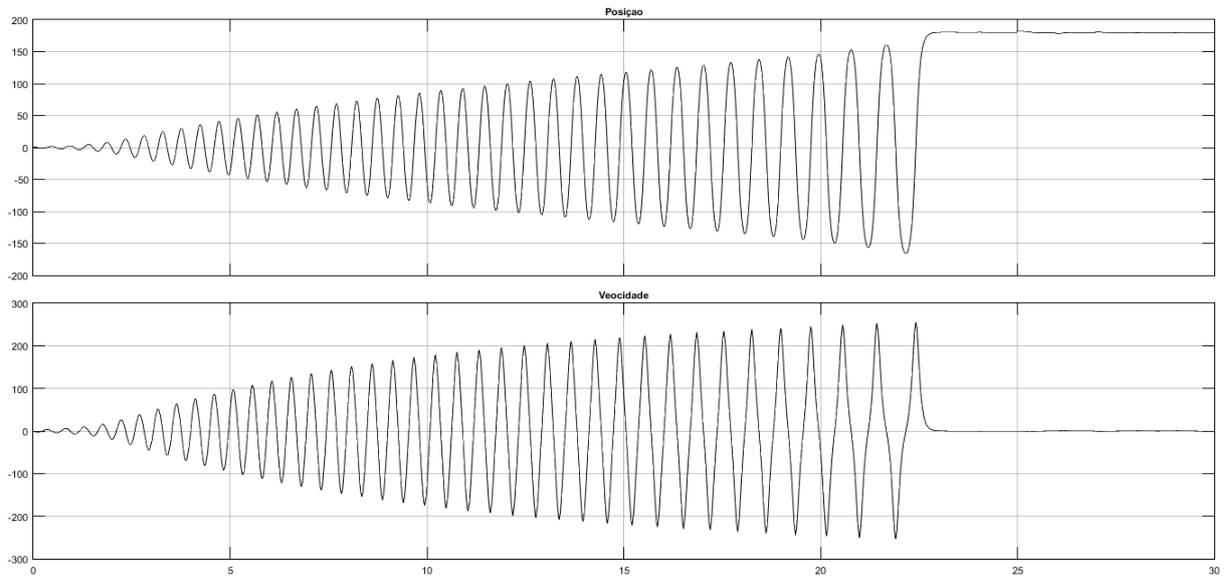
Figura 65 – Diagrama de Blocos da planta com Distúrbio



Fonte: Autor

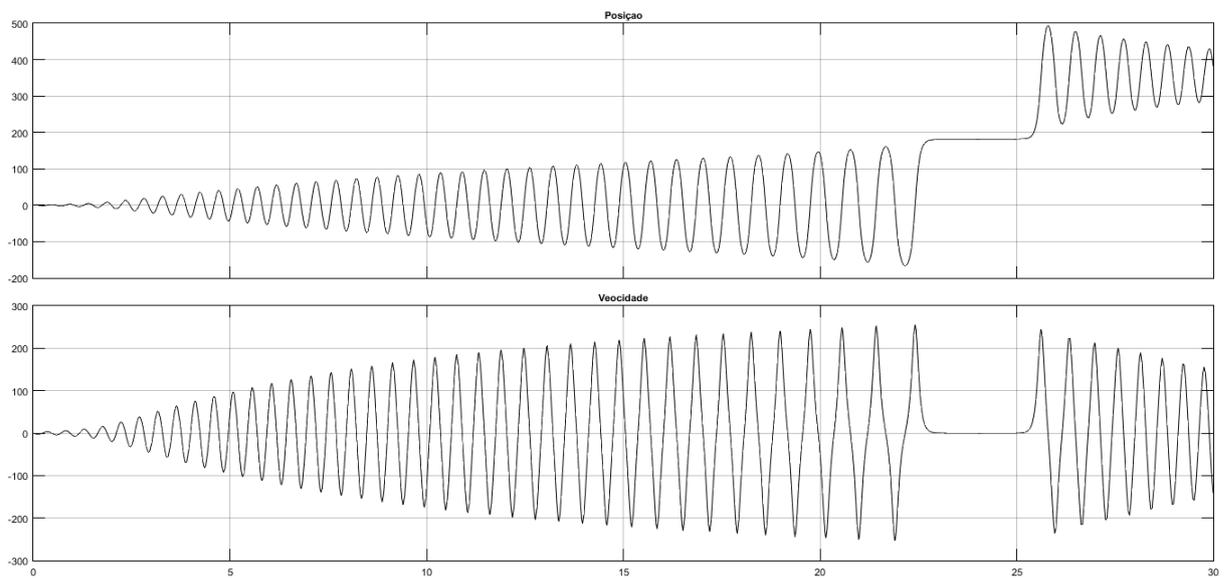
A resposta do pêndulo ao sistema com distúrbio dentro dos limites do controlador pode ser vista na figura 66 e fora desses limites, na figura 67. O ruído aplicado diretamente do bloco ocorre a cada 1 segundo. O valor máximo para esses ruídos não desestabilizarem o sistema é de 0,0003. Acima disso, a realimentação de estados não consegue mais controlar o pêndulo.

Figura 66 – Resposta do Pêndulo ao Distúrbio



Fonte: Autor

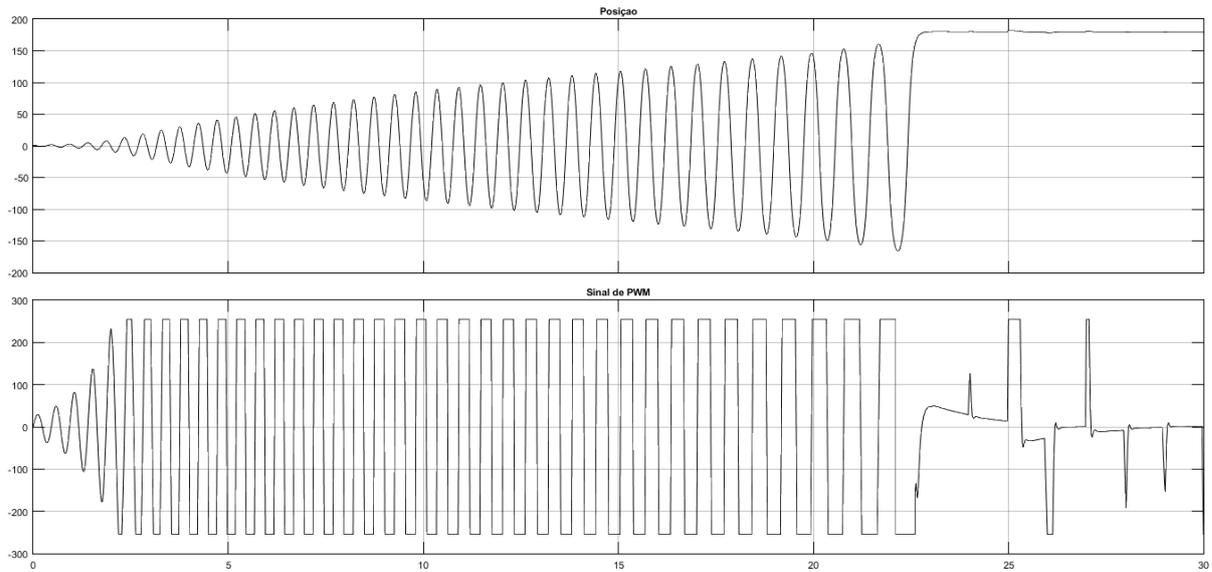
Figura 67 – Resposta do Pêndulo ao Distúrbio Acima do limite máximo



Fonte: Autor

Verificando a zona de ruído, pode-se ver na figura 68 como a realimentação de estados atua para estabilizar o sistema no gráfico de entrada, ou seja, no sinal que é enviado ao motor.

Figura 68 – Atuação da Realimentação de Estados na simulação



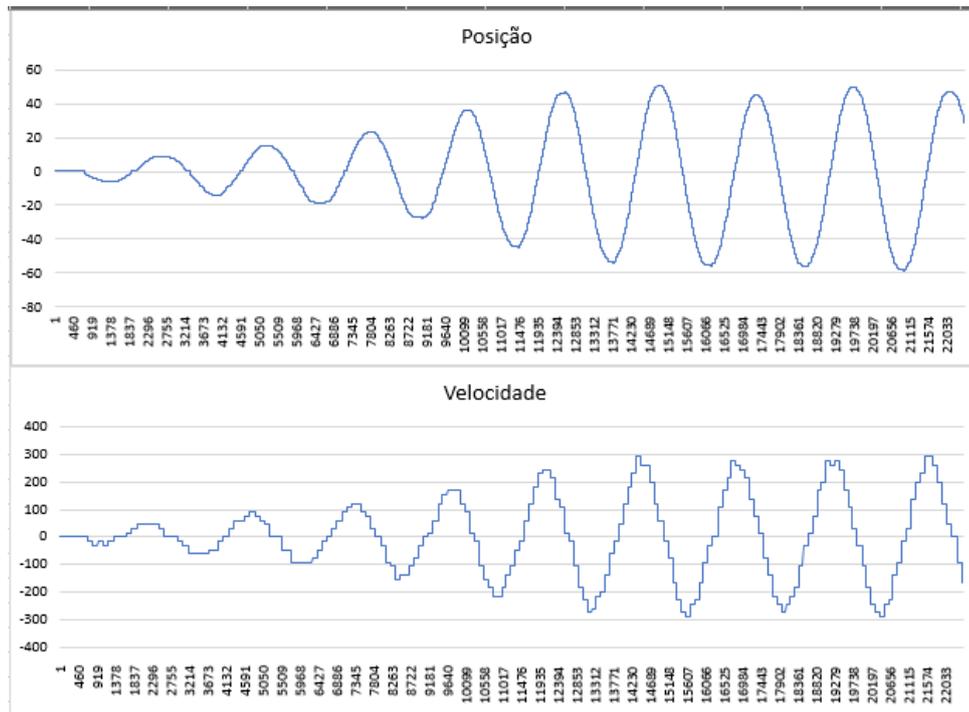
Fonte: Autor

5.9 RESULTADOS DO TESTE DO PROTÓTIPO

Semelhante à simulação, o controle de levantamento não atua quando o pêndulo está no repouso. Para isso, é necessário que se movimente o pêndulo numa amplitude bem baixa, na prática, um pequeno e rápido empurro na haste é o suficiente.

O projeto inicial considerava o uso de uma roda de reação para a atuação do sistema, contudo, como não foi adotada nenhuma metodologia para o projeto específico do formato da roda, o torque gerado devido ao momento de inércia da roda não foi suficiente para a elevação do pêndulo. A figura 69 mostra a amplitude do pêndulo, que variou em torno de 50 graus.

Figura 69 – Amplitude de movimento do protótipo com roda de reação



Fonte: Autor

Como solução para isso, o projeto foi adaptado para um modelo de *acrobot* com a inserção de uma barra de alumínio no eixo do motor. A figura 70 mostra o resultado da nova barra no protótipo. Devido a esta contribuição, o novo momento de inércia foi quintuplicado em relação ao valor original, tornando possível o controle de levantamento.

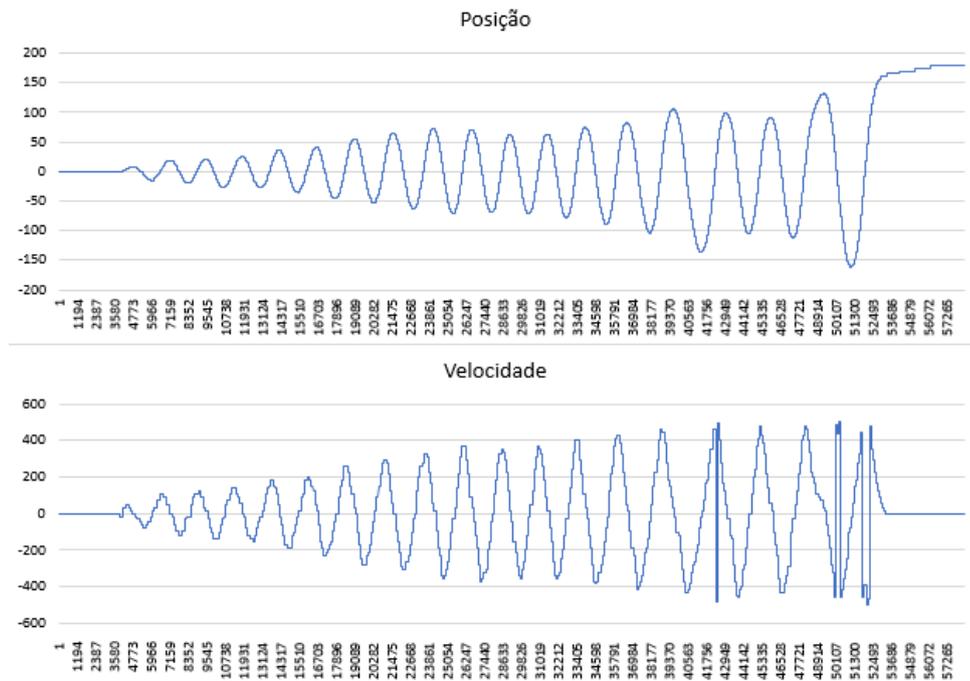
Figura 70 – Protótipo Adaptado



Fonte: Autor

O controle de levantamento leva cerca de 28 segundos para elevar o pêndulo até a posição de atuação do controle de estabilidade. A figura 71 mostra o gráfico de amplitude e velocidade do pêndulo ao longo do tempo.

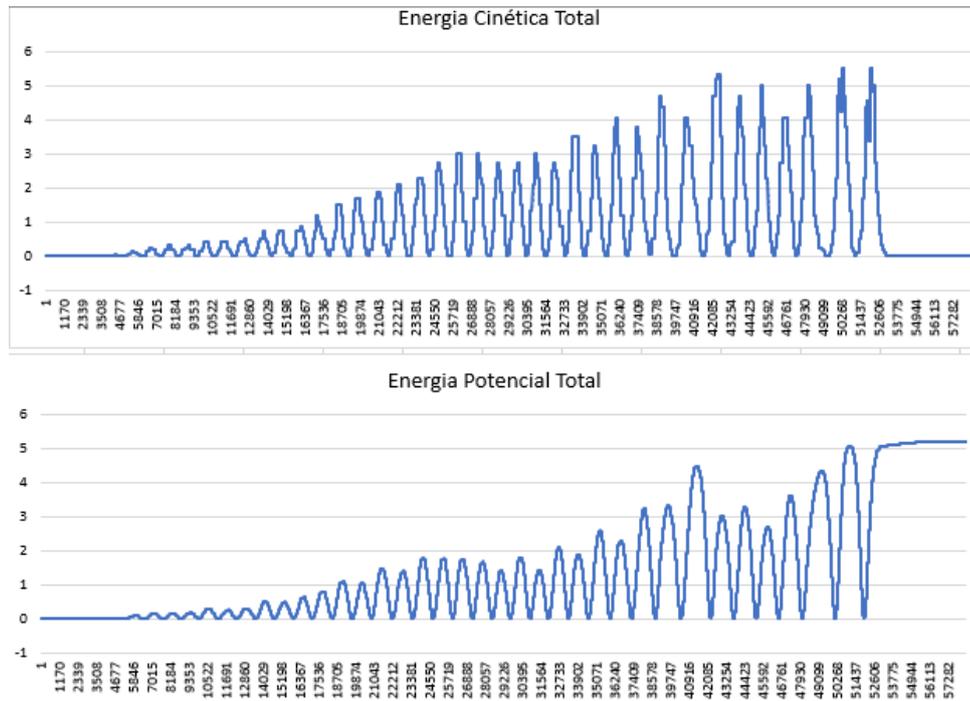
Figura 71 – Controle de Levantamento do protótipo



Fonte: Autor

A forma de onda da energia gerada em todo o movimento pode ser vista na figura 72.

Figura 72 – Energias Cinética e Potencial do Protótipo



Fonte: Autor

O teste do controle de estabilidade foi realizado de forma separada do controle de levantamento, para que se validasse a estabilidade de forma singular, contudo devido às imperfeições do protótipo, não foi possível o controle em torno do ângulo π rad. O protótipo foi elevado à posição desejada, mas o controle não foi capaz de estabilizá-lo. Quando aplicados em conjunto, o controle de levantamento funcionou da forma testada, porém o controle de estabilidade não conseguiu atuar.

Ressaltando ainda, que o controle de levantamento atuou como esperado, visto que a velocidade com o que pêndulo chega ao topo é bem próxima de zero.

Por fim, não foram aplicados distúrbios ao sistema controlado, uma vez que as próprias imperfeições na montagem e fabricação do protótipo impossibilitam uma estabilidade perfeita, já atuando como distúrbios para o controlador. A modificação no modelo dinâmico do pêndulo interfere na realimentação de estados, porém o controle de levantamento não necessita de alteração, uma vez que em ambos os casos são utilizados controles de energia.

Tanto rodas de reação, como barras utilizadas em *acrobots* seguem o mesmo princípio físico, mas diferenciando-se em conceito. Ambos os sistemas, não-lineares e sub-atuados, tem dois graus de liberdade e um único atuador na segunda junta, além de ambos movimentarem um objeto com elevado momento de inércia em sua segunda junta para a geração de torque de reação e consequentemente, aplicação de controle dinâmico. O que torna possível a comparação e adaptação mútua entre ambos os sistemas.

CONCLUSÕES

Apesar da utilização de novos objetos não presentes em projeto, pode-se dizer que a modelagem e simulação atenderam ao proposto, uma vez que foi possível o controle em malha fechada tanto isolado, quando na presença de distúrbios, e o sistema em malha aberta respondeu de forma semelhante ao sistema físico. Com relação ao protótipo, a estratégia de controle por levantamento se mostrou bastante eficaz, elevando o conjunto ao topo em 28 segundos, contudo a estabilização deixou a desejar, pois não conseguiu estabilizar o sistema, nem mesmo por pouco tempo.

A adaptação do pêndulo invertido para um *acrobot* não afetou a modelagem matemática, visto que foi utilizado o mesmo controle proposto em projeto, com ajuste de ganho e ainda o pêndulo chegou ao topo com velocidade praticamente nula. Um provável motivo para o qual o protótipo não funcionou da maneira adequada foi que a modelagem proposta não considerou os efeitos vibracionais, nem as folgas da montagem mecânica. Tais eventos podem ser comparados aos ruídos impostos em simulação, contudo, numa amplitude maior, e por esta razão, o protótipo teria os resultados expostos.

Como possíveis trabalhos a serem desenvolvidos futuramente, recomenda-se uma tratativa para possibilitar a criação ou definição de uma relação entre massa, comprimento e momentos de inércia do pêndulo para que qualquer pêndulo projetado nessas condições seja controlável e não seja necessária a utilização de objetos adicionais para aumentar o momento de inércia, ou ainda modificar a tensão de alimentação do motor para geração de maior torque. Recomenda-se ainda utilizar métodos de tratamento dos dados mais precisos, observando que nesta pesquisa foram necessárias várias etapas de refinamento de sinal para a utilização confiável dos sinais dos *encoders*.

Recomenda-se ainda a definição de uma metodologia que possibilite o cálculo do ganho de realimentação do controle de levantamento, uma vez que nesta pesquisa, foi definido de forma empírica.

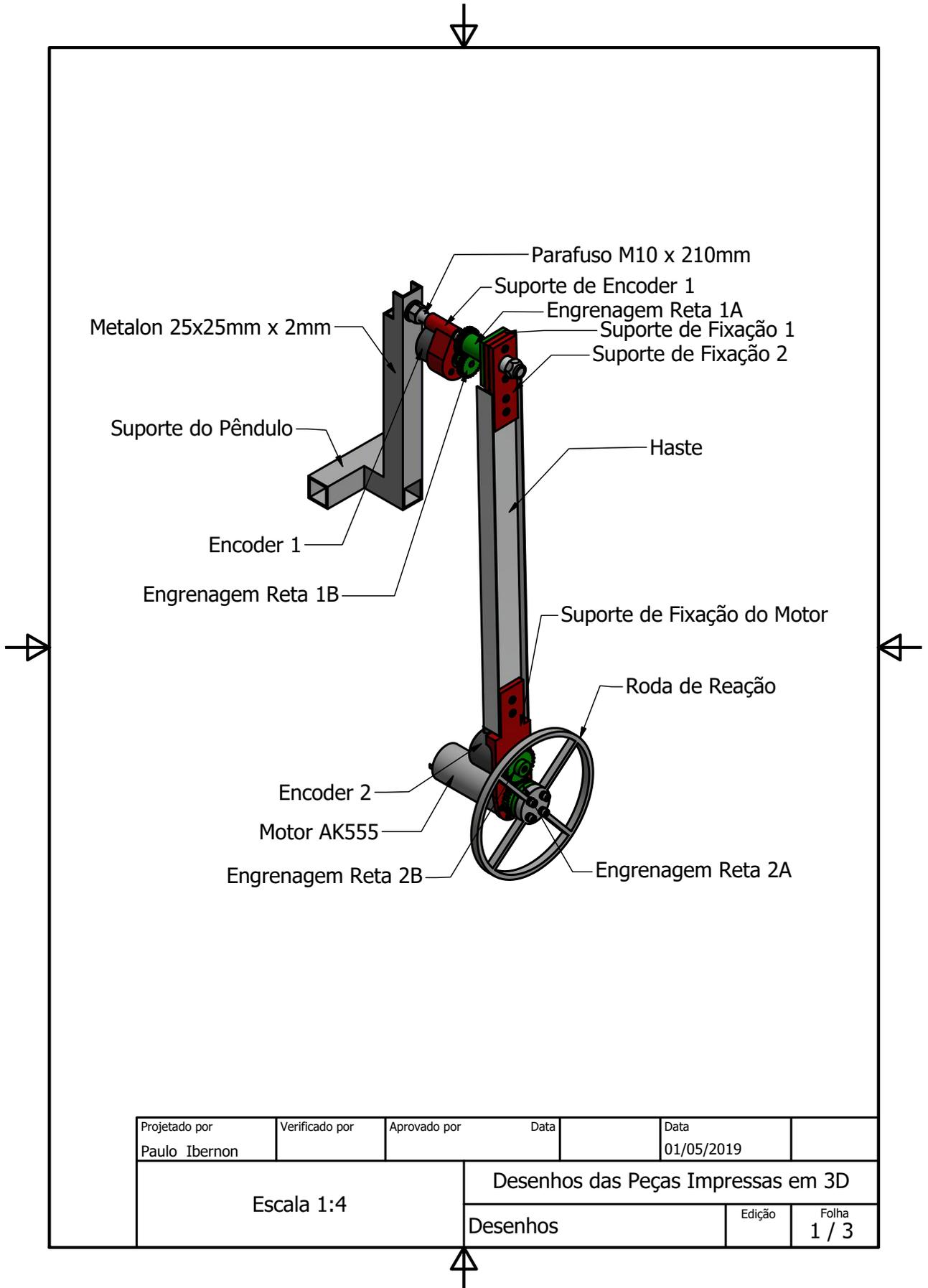
REFERÊNCIAS

- ARDUINO. *What is Arduino?* 2018. Disponível em: [⟨https://www.arduino.cc/en/Guide/Introduction⟩](https://www.arduino.cc/en/Guide/Introduction). Acesso em: 31 ago. 2018.
- BANAVAR, R. N.; MAHINDRAKAR, A. D. Energy-based swing-up of the acrobot and time-optimal motion. In: IEEE. *Proceedings of 2003 IEEE Conference on Control Applications, 2003. CCA 2003*. [S.l.], 2003. v. 1, p. 706–711.
- BASSANEZI, R.; JR, W. F. Equações diferenciais com aplicações, editora habra ltda. *São Paulo*, 1988.
- BLOCK, D. J.; ÅSTRÖM, K. J.; SPONG, M. W. *The reaction wheel pendulum*. Illinois: Morgan & Claypool Publishers, 2007.
- BOBROW, F. *Controle de um pêndulo invertido com 6 graus de liberdade e rodas de reação*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2015.
- BREVIK, P. *Two-Axis Reaction Wheel Inverted Pendulum*. Dissertação (Mestrado) — NTNU, 2017.
- CABRAL, E. L. L. Sistemas na forma ss em tempo discreto. 2016.
- CAETANO, E. C. Aplicações das equações de euler-lagrange. S.D.
- CARRARA, V. *Análise e controle de sistemas lineares*. ResearchGate, 2012. Disponível em: [⟨https://www.researchgate.net/figure/Figura-724-Pendulo-invertido-do-exemplo-76_fig6_259143736⟩](https://www.researchgate.net/figure/Figura-724-Pendulo-invertido-do-exemplo-76_fig6_259143736). Acesso em: 10 jun. 2019.
- CHAUVEAU, G. et al. *Controlling the Reaction Wheel Pendulum*. [S.l.: s.n.], 2005.
- CORONEL, R. *Controle Fuzzy*. 2010. Disponível em: [⟨https://rafaelcoronel.wordpress.com/2010/10/23/control-fuzzy/⟩](https://rafaelcoronel.wordpress.com/2010/10/23/control-fuzzy/). Acesso em: 10 jun. 2019.
- CTMS. *Control Tutorials for MATLAB® and SIMULINK®: Time-Response Analysis of a DC Motor*. 2019. Disponível em: [⟨http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Activities\DCmotorA⟩](http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Activities\DCmotorA). Acesso em: 15 abr. 2019.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Sistemas de Controle Modernos*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- FERREIRA, J. S. P. *Sistemas Dinamicos Lineares no R²*. 1. ed. Macapá: SBM, 2016.

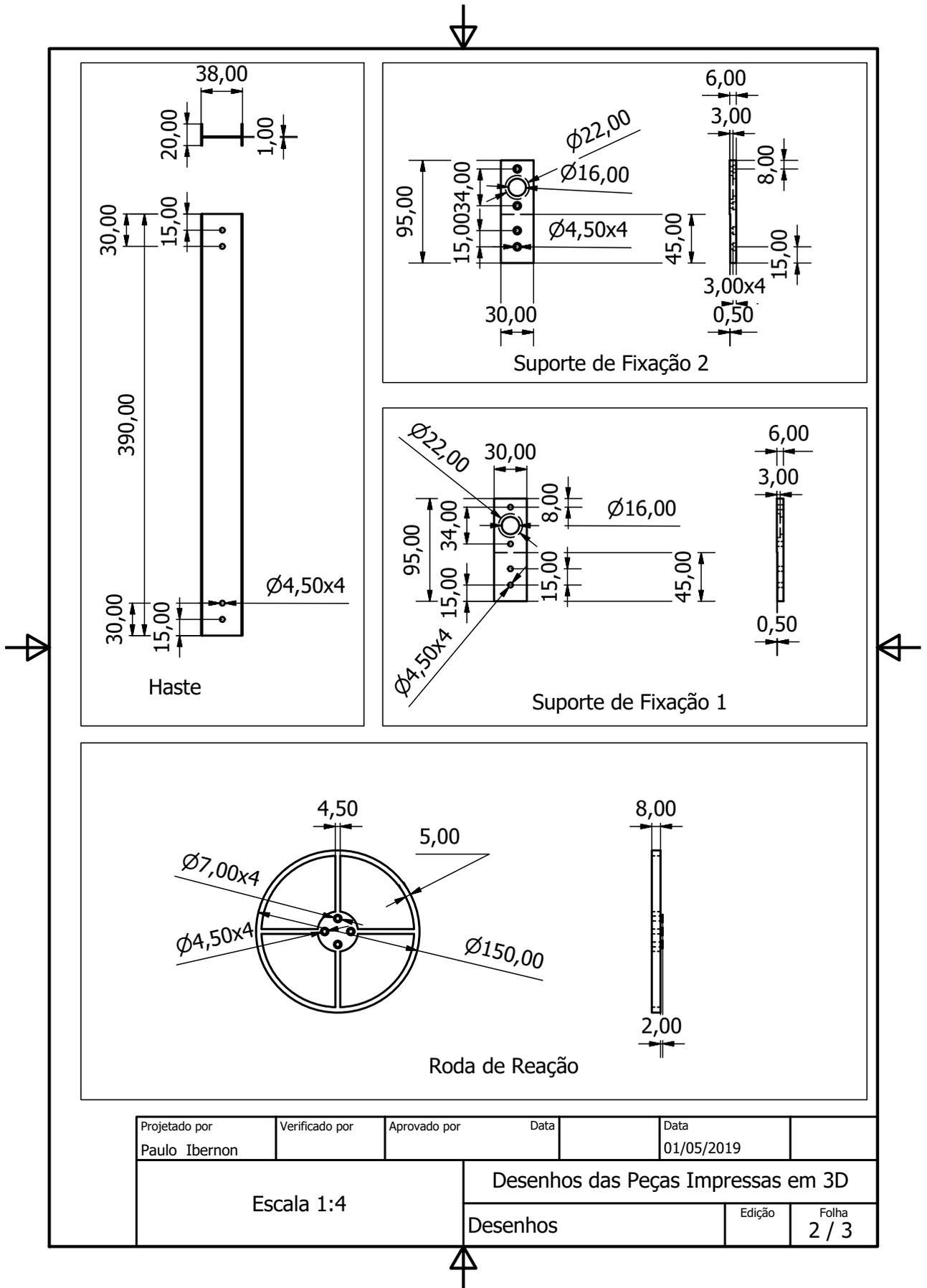
- FLORIAN, R. V. Correct equations for the dynamics of the cart-pole system. *Center for Cognitive and Neural Studies (Coneural), Romania*, Citeseer, 2007.
- FURATA, A. Swinging up a pendulum by energy control. *ENERGY*, v. 400, p. 23, 1996.
- GOMIDE, F. A. C.; GUDWIN, R. R. Modelagem, controle, sistemas e lógica fuzzy. *SBA controle & Automação*, v. 4, n. 3, p. 97–115, 1994.
- HALLIDAY, D.; RESNICK; WALKER, J. *Fundamentos de Física, volume 2: Gravitação, Ondas e Termodinâmica*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- HAUSER, J.; MURRAY, R. M. Nonlinear controllers for non-integrable systems: the acrobot example. IEEE, 1990.
- INFINEON TECHNOLOGIES. *BTS 7960 High Current PN Half Bridge*. [S.l.], 2004.
- INN, C. *Components Inn - Your components right on your door step*. 2018. Disponível em: <https://componentsinn.wordpress.com/blog/>. Acesso em: 01 set. 2018.
- INSTRUMENTS, N. *Medições com encoders de quadratura: Guia prático*. 2013. Disponível em: <http://www.ni.com/tutorial/7109/pt/>. Acesso em: 15 abr. 2019.
- JEPSEN, F. et al. Development and control of an inverted pendulum driven by a reaction wheel. In: IEEE. *2009 International Conference on Mechatronics and Automation*. [S.l.], 2009. p. 2829–2834.
- JÚNIOR, A. K. Notas de aula , representação de funções de transferência no espaço de estados - controlabilidade. 2016.
- KALMAN, R. E. et al. Contributions to the theory of optimal control. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, v. 5, n. 2, p. 102–119, 1960.
- KARL. *Arduino Encoder Reading*. Arduino Forum, 2007. Disponível em: <https://forum.arduino.cc/index.php?topic=44817.0>. Acesso em: 10 mai. 2019.
- MANTECH ELECTRONICS. *Arduino Mega 2560*. [S.l.], 2018.
- MAYA, P. A.; LEONARDI, F. *Controle Essencial*. São Paulo: Pearson, 2011.
- MOORE, H. F. Análise de desempenho de um controlador bang-bang em um sistema de freio abs. 2014.
- MORALES, I. M. Notas de aula , controle não linear. 2017.
- NASA. *NASA Spinoff - Reaction/Momentum Wheel*. 1997. Disponível em: <https://spinoff.nasa.gov/spinoff1997/t3.html>. Acesso em: 07 set. 2018.
- NAVARRO, A.; SUN, Y. The reaction wheel pendulum. *ECE 486, Control Systems, Fall 2013*, 2013.
- NEOYAMA. *MICRO MOTOR DC C/ CX. REDUÇÃO*. [S.l.], 2017.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 4. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2003.
- PENIDO, E. C. C.; TRINDADE, R. S. *Microcontroladores*. 1. ed. Ouro Preto: Rede e-Tec Brasil, 2013.
- QUEIROZ, F. C. D. *LINEARIZAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE*. Dissertação (Mestrado) — UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ, 2016.

- RAMOS, J. L. A. S. *Reaction Wheel Pendulum*. 2017. Disponível em: <http://web.mit.edu/jlramos/www/RWpendulum.html>. Acesso em: 06 set. 2018.
- RICHEN TECHNOLOGY. *LPD3860-360BM*. [S.l.], 2017.
- ROSA, A.; MOMBACH, E. A.; BREGALDA, R. *CONTROLE DE VELOCIDADE DE MOTOR CC E TACO-GERADOR*. Projeto Integrador, 2013. Disponível em: <http://cursos.chapeco.ifsc.edu.br/engenharia/wp-content/uploads/sites/2/2013/10/Motor-CC-Artigo..pdf>. Acesso em: 23 abr. 2019.
- SEGWAY. *Segway x2 SE Personal Transporter*. 2018. Disponível em: <http://www.segway.com/products/professional/segway-x2-se>. Acesso em: 01 set. 2018.
- SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. et al. *Applied nonlinear control*. [S.l.]: Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991. v. 199.
- SULTAN, K.; MIRZA, A. Inverted pendulum, analysis, design and implementation. *Visionaries Document*, 2003.
- WERNER, G. P. *Pêndulo Acionado com Roda de Reação*. 2017. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.
- YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. *Física I - Mecânica*. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2008.
- ZUBEN, P. V. Introdução ao controle por realimentação, notas de aula. *Unicamp*, 2010.
- ZUBEN, P. V. Sistemas não-lineares de 2ª ordem. plano de fase, notas de aula. *Unicamp*, s.d.

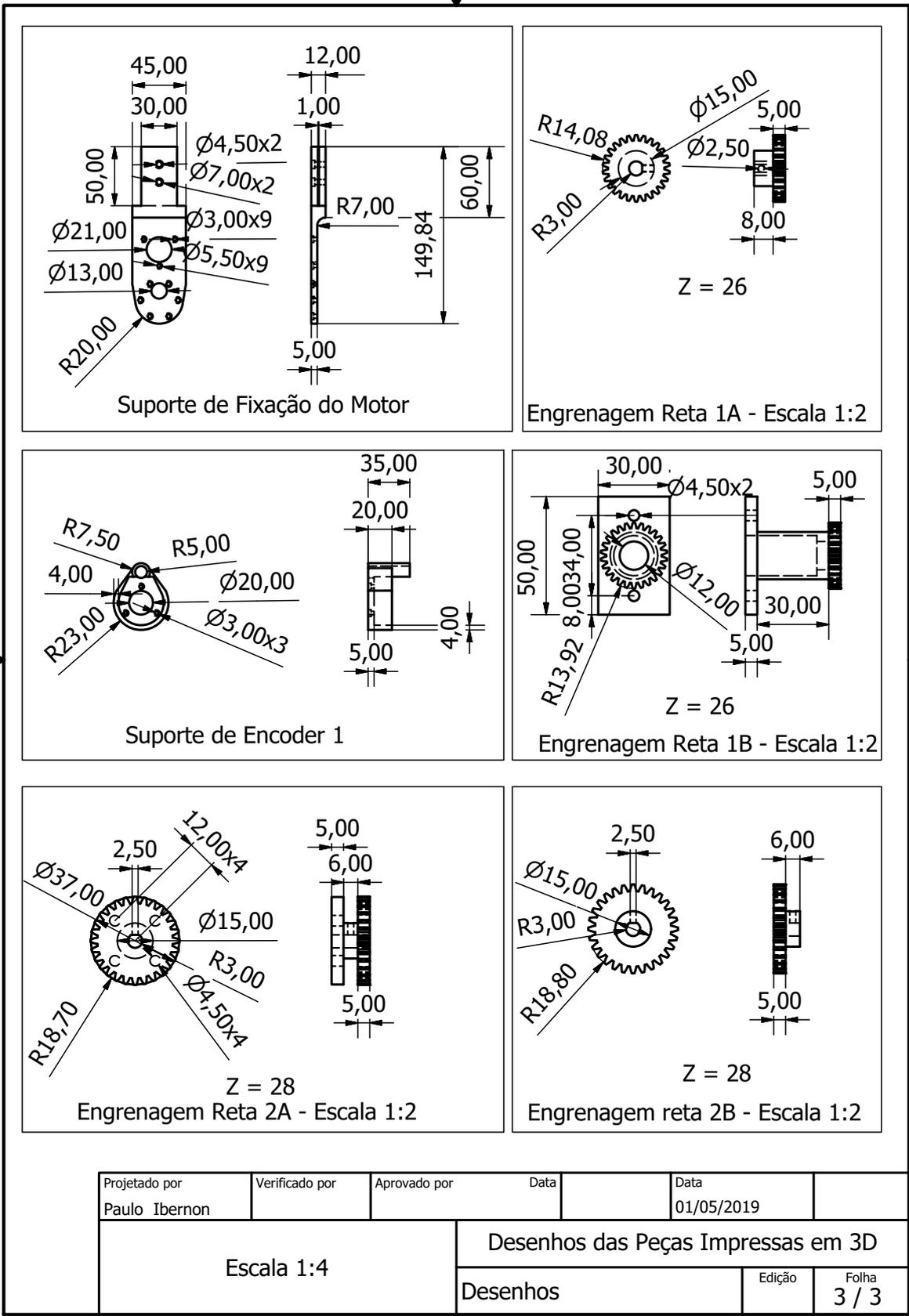
APÊNDICE A - DESENHOS TÉCNICOS DAS PEÇAS PROJETADAS



Projetado por	Verificado por	Aprovado por	Data	Data
Paulo Ibernnon				01/05/2019
Escala 1:4			Desenhos das Peças Impressas em 3D	
			Edição	Folha
				1 / 3



Projetado por Paulo Ibernon	Verificado por	Aprovado por	Data	Data 01/05/2019
Escala 1:4		Desenhos das Peças Impressas em 3D		
		Desenhos	Edição	Folha 2 / 3



Projetado por Paulo Ibernon	Verificado por	Aprovado por	Data	Data 01/05/2019
Escala 1:4		Desenhos das Peças Impressas em 3D		
		Desenhos	Edição	Folha 3 / 3

APÊNDICE B - CÓDIGOS MATLAB®

Matriz de Controlabilidade e Observabilidade

```

1  %matriz de controlabilidade e observabilidade
2  clear all, clc, close all;
3  ordemA = input('Ordem de A = ');
4  disp('entre com as matrizes')
5  A = input('A = ');
6  B = input('B = ');
7  C = input('C = ');
8  %controlabilidade de estados
9  AB = A*B;
10 A2B = (A*A)*B;
11 A3B = (A*A*A)*B;
12 for y = 1: ordemA
13     for x=1: ordemA
14         if y==1
15             Pc(x,y) = B(x);
16         elseif y==2
17             Pc(x,y) = AB(x);
18         elseif y==3
19             Pc(x,y) = A2B(x);
20         elseif y==4
21             Pc(x,y) = A3B(x);
22         end
23     end
24 end
25 disp('Matriz de controlabilidade: ')
26 Pc
27 %observabilidade
28 CA = C*A;
29 C2A = C*(A*A);
30 C3A = C*(A*A*A);
31 for y = 1: ordemA
32     for x=1: ordemA
33         if y==1
34             Potransp(x,y) = C(x);
35         elseif y==2
36             Potransp(x,y) =CA(x);
37         elseif y==3
38             Potransp(x,y) = C2A(x);
39         elseif y==4

```

```

40         Potransp(x,y) = C3A(x);
41     end
42 end
43 end
44 disp('Matriz de observabilidade: ')
45 Po = Potransp'
46 disp('conclusao: ')
47 DET_Pc = det(Pc)
48 DET_Po = det(Po)
49 if DET_Pc == 0
50     disp('sistema nao controlavel')
51 elseif DET_Pc ~= 0
52     disp('sistema controlavel')
53 end
54 if DET_Po == 0
55     disp('sistema nao observavel')
56 elseif DET_Po ~= 0
57     disp('sistema observavel')
58 end

```

Matriz de Realimentação de Estados

```

1  %matriz K realimentacao de estados
2  clc,clear all, close all;
3  disp('qual o grau da matriz de estados?')
4  ordem = input('grau = ');
5  disp('insira matriz A')
6  A=input('A = ');
7  disp('polos desejados: ')
8  for x=1:ordem
9      polos(x) = input('polo = ');
10 end
11 polinomio = poly(polos)
12 disp('Matriz A na forma canonica?')
13 disp('sim(1) , nao(2)')
14 resposta = input('sim ou nao ');
15 if resposta ==1
16     for x=1:ordem
17         K(x) = polinomio(ordem+2-x)+A(ordem, x);
18     end
19 elseif resposta == 2
20     disp('insira matriz de cont. ')

```

```
21 Mc = input('Mc = ');
22 disp('Mc inversa = ')
23 Mcinv = inv(Mc)
24 for x=1:ordem
25     if x==ordem
26         M1(x) = 1;
27     elseif x~=ordem
28         M1(x) = 0;
29     end
30 end
31 disp('pol. carac. aplicado em A')
32 M2 = zeros(ordem);
33 for x=1:ordem
34     matriz = polinomio(x)*(A^(ordem+1-x));
35     M2 = M2 + matriz;
36 end
37 M2 = M2+ polinomio(ordem+1)*eye(ordem);
38 K = M1*Mcinv*M2;
39 end
40 K
```

APÊNDICE C - CÓDIGOS DE CONTROLE NO ARDUINO

```
1 int encoder1PinA = 2;
2 int encoder1PinB = 3;
3 volatile int encoder1Pos = 0;
4 volatile int encoder1PinALast = LOW;
5 volatile int n1 = LOW;
6 volatile int m1 = LOW;
7 int pos1New = 0;
8 int pos1Old = 0;
9
10 int encoder2PinA = 18;
11 int encoder2PinB = 19;
12 volatile int encoder2Pos = 0;
13 volatile int encoder2PinALast = LOW;
14 volatile int n2 = LOW;
15 volatile int m2 = LOW;
16 int pos2New = 0;
17 int pos2Old = 0;
18
19
20 int pos1vel = 0;
21 float vel1 = 0;
22 int pos2vel = 0;
23 float vel2 = 0;
24
25 int interval = 65;
26 unsigned long currentTime;
27 unsigned long previousTime = 0;
28
29 float pwm;
30
31 double k1 = -3017.4;
32 double k2 = -230.6;
33 double k3 = -13.1;
34 double k4 = 51.3;
35
36
37
38 void setup()
39 {
40     Serial.begin (500000);
```

```

41  pinMode (encoder1PinA ,INPUT);
42  pinMode (encoder1PinB ,INPUT);
43  attachInterrupt (1, CountA1, CHANGE);
44  attachInterrupt (0, StateB1, FALLING);
45
46  pinMode (encoder2PinA ,INPUT);
47  pinMode (encoder2PinB ,INPUT);
48  attachInterrupt (4, CountA2, CHANGE);
49  attachInterrupt (5, StateB2, FALLING);
50
51  pinMode(7, OUTPUT);
52  pinMode(8 ,OUTPUT);
53  analogWrite (7, 0);
54  analogWrite (8 ,0);
55  pinMode(50,OUTPUT);
56  pinMode(51, OUTPUT);
57  digitalWrite (50, HIGH);
58  digitalWrite (51, HIGH);
59  }
60
61  void loop ()
62  {
63    currentTime = millis ();
64    if (currentTime - previousTime >= interval){
65      vel1 = (pos1New-pos1vel)*1000/interval; // velocidade em graus/s
66      vel2 = (pos2New-pos2vel)*1000/interval; // velocidade em graus/s
67
68      pos1vel = pos1New;
69      pos2vel = pos2New;
70      previousTime = currentTime;
71    }
72    encoder1PinALast = n1;
73    pos1New = encoder1Pos;
74    encoder2PinALast = n2;
75    pos2New = encoder2Pos;
76
77    if (abs(encoder1Pos*36/40) >=700 && abs(encoder1Pos*36/40) <= 800){
78      float pulso = -(k1*(180-(encoder1Pos*36/40)) + k2*vel1 + k3*encoder2Pos*(36/
79      // float pulso = 0;
80      pwm = constrain (pulso , -150 ,150);
81    } else{

```

```
82 float pulso = 20*vel1*3.1415/18;
83 pwm = constrain(pulso, -255,255);
84 }
85
86 escreve_pwm(pwm);
87
88
89
90 Serial.print (encoder1Pos*36/40, DEC);
91 Serial.print ("/");
92 Serial.println (vel1);
93 // Serial.print ("/");
94 // Serial.print (encoder2Pos*36/40, DEC);
95 // Serial.print ("/");
96 // Serial.print (vel2, 0);
97 // Serial.print ("/ pwm: ");
98 // Serial.println (pwm);
99 pos1Old = pos1New;
100 pos2Old = pos2New;
101
102 }
103
104 void CountA1()
105 {
106 n1 = digitalRead(encoder1PinA);
107 if ((encoder1PinALast == LOW) && (n1 == HIGH)) {
108     if (m1 == LOW) {
109         encoder1Pos--;
110     }
111     else {
112         encoder1Pos++;
113     }
114 }
115 }
116
117 void CountA2()
118 {
119 n2 = digitalRead(encoder2PinA);
120 if ((encoder2PinALast == LOW) && (n2 == HIGH)) {
121     if (m2 == LOW) {
122         encoder2Pos--;
```

```
123     }
124     else {
125         encoder2Pos++;
126     }
127 }
128 }
129 void StateB1 ()
130 {
131     m1 = digitalRead(encoder1PinB);
132 }
133
134 void StateB2 ()
135 {
136     m2 = digitalRead(encoder2PinB);
137 }
138
139 int escreve_pwm(int pwm){
140     if (pwm >0){
141         analogWrite(7,pwm);
142     }else
143     { if (pwm ==0){
144         analogWrite(7,0);
145         analogWrite(8,0);
146     } else{
147         analogWrite(8,-pwm);
148     }}
149 }
```